АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

1954

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников,
Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский,
Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

QA
1
A373
1954

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1517—1943

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 1 1954

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

21at68

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 3
Основания математики и математическая логика 9
Теория чисел 11
Алгебра 13
Многочлены и линейная алгебра 14
Группы 14
Поля, кольца и структуры 19
Топология 22
Теория функций действительного переменного 23
Приближение функций полиномами и их обобщениями 25
Интегральные преобразования функций 28
Теория функций комплексного переменного 30
Дифференциальные уравнения 38
Обыкновенные дифференциальные уравнения 38
Уравнения в частных производных 42
Интегральные уравнения 54
Вариационное исчисление 55
Анализ (другие вопросы) 56
Специальные функции 56
Числовые ряды 60
Функциональный анализ 61
Теория вероятностей 66
Математическая статистика 71
Теоретико-вероятностные и статистические методы в технике 75
Геометрия 77
Элементарная геометрия, геометрия треугольника и тетраэдра. Геометрические построения 79
Алгебраическая геометрия 80
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 82
Дифференциальная геометрия n-мерного пространства. Риманова геометрия 84
Неевклидова геометрия. Обобщенные пространства 84
Геометрия в целом. Выпуклые многообразия 87
Численные и графические методы 88
Таблицы 93
Вычислительные машины и математические приборы 94
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 107
История математики. Биографии 110
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, 57, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников*

Рефераты 1517—1943 **№ 1** **Январь 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1517. Общеуниверситетская научная конференция «Ломоносовские чтения» на механико-математическом факультете. Скорый И. А., Вестн. МГУ, 1953, 5, № 8, 171—173

Приводятся краткие резюме докладов, прочитанных на «Ломоносовских чтениях» 1953 г. на механико-математическом факультете МГУ. В частности, по математике были обсуждены 4 доклада: Вероятностные методы в статистической механике. А. Я. Хинчин; Некоторые вопросы качественной теории динамических систем с интегральным инвариантом. А. Н. Колмогоров; Об уравнениях с частными производными, содержащими малый параметр при старших производных. О. А. Олейник; К теории лиевых колец и алгебр. А. И. Ширшов.

1518. Годичное собрание в Сент-Луисе (The annual meeting in St. Louis), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 2, 140—181 (англ.)

Резюме докладов, представленных годичному собранию Американского математического общества, состоявшемуся 27—29 декабря 1952 г. В частности, приведены резюме следующих докладов:

Алгебра и теория чисел

1. Преобразования Риньо и Лебега пифагоровых тетраэдров. Беккер (Becker H. W.). Изучаются преобразования пифагоровых тетраэдров, указанные Риньо (Rignaux, L'Intermed. des math., 1918, 25, 129) и В. Лебегом (Dickson, History of the theory of numbers, II, 637).

2. Разностные множества в конечном поле. Брук (Bruck R. H.). Пусть F — поле Галуа из P элементов, $m \nmid P-1$; $H(m)$ — мультипликативная группа m-ых степеней элементов поля, отличных от 0. $H(m)$ называется разностным множеством в F, если число упорядоченных пар элементов $h, k \in H(m)$ таких, что $h-k=c$, одно для всех $c \in F$. Формулируются условия, необходимые и достаточные, чтобы $H(m)$ было разностным множеством в F.

3. Метод Гаусса для определения числа решений некоторых уравнений в конечном поле. Брук (Bruck R. H.). Пусть $F=GF(P)$ — поле Галуа из P элементов, $m \mid P-1$; $H(m)$ — мультипликативная группа m-ых степеней, отличных от 0. Разрабатывается метод Гаусса для решения уравнения $ax^m+\ldots+cz^m=d$, где $x, \ldots, z$ — неизвестные в любом заданном количестве (Weil A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 497—508).

4. О дискриминанте произвольных алгебраических числовых полей. Каллоуэй (Calloway J. M.) Получено обобщение тождества Зигеля (Siegel C. L., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1922, 17—24), показывающее, что для дискриминанта d алгебраического поля степени $n>1$ имеет место неравенство $d>(\pi/3)^{2r_2}$, где r_2 — число пар комплексно-сопряженных полей.

5. Сравнения для коэффициентов Вейерштрассовой $\wp$-функции и связанных с ней функций. Карлиц (Carlitz Leonard). Пусть $\wp(x)=\wp(x, g_2, g_3)$ — функция Вейерштрасса с неопределенными инвариантами g_2, g_3; $f(x)=(\wp(x))^{-1}=\sum_2^\infty B_m x^m/m!$;

$$\wp(x)=x^{-2}+\sum_2^\infty C_m x^m/m!; \qquad (\wp(x))^{-1/2}=h(x)=$$

$$=\sum_1^\infty A_m x^m/m!;$$ здесь A_m, B_m, C_m — полиномы относительно g_2, g_3 с целыми коэффициентами. Доказываются сравнения типа

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}C_s A_p^{r-s} B_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r},$$

$$m \geqslant r \geqslant 1.$$

6. Сравнения Куммера и производная Шура. Карлиц (Carlitz Leonard). Пусть p — простое число и $\{a_m\}$ — последовательность рациональных чисел, целых по модулю p. Определяются аналоги конечных разностей, связанных с модулем p, и для них доказываются сложно формулируемые сравнения.

7. Некоторые теоремы о сравнениях Куммера. Карлиц (Carlitz Leonard). Пусть p — простое число, $\{a_m\}$ — последовательность рациональных чисел, целых по модулю p. Сравнения вида

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} C_{rs} a_{m+s(p-1)} a_p^{r-s} \equiv 0 \pmod{p^r}$$

для всех $m \geqslant r \geqslant 1$ при определенных C_{rs} называются куммеровыми. Доказывается, что если $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ им удовлетворяют, то $\{a_m b_m\}$ тоже удовлетворяет куммерову сравнению.

8. Кольца арифметических функций. II. Квадратичные сравнения. Коэн (Cohen Eckford). Пусть $r > 1$ — целое нечетное; изучается число решений сравнения $a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 \equiv n \pmod{r}$. Строится аналог «особого ряда» Харди и Литлвуда.

9. О числе решений кубических сравнений. Коэн (Cohen Eckford). Изучается число решений $N = N(n, p^\lambda)$ сравнения $ax^3 + by^3 \equiv n \pmod{p^\lambda}$, где p — простое, сравнимое с 1 (mod 3). Рассматриваются и другие кубические сравнения.

10. Характеризация непрерывных дробей при помощи знаков. Коэн (Cohn Harvey). Рассматриваются тройки векторов плоской числовой решетки V_1, V_2, V_3 со следующими свойствами: а) $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ и б) любые два вектора из них образуют базис. Назовем базис приведенным, если не все три вектора расположены в паре противоположных квадрантов (условие знака). Тогда процесс $V_1 \to V_1 - V_3$, $V_2 \to V_2 + V_3$, $V_3 \to V_3$ дает все приведенные базисы.

11. Об упорядоченных телах. Конрад (Conrad P. F.). Доказывается, что тело D может быть упорядочено тогда и только тогда, когда существует норма f, кольцо R классов вычетов которой может быть так упорядочено, что все элементы вида $P + a_1^2 \ldots a_n^2$ будут положительны; здесь P — простой идеал, $a_1^2 \ldots a_n^2$ — единица. Изучаются a-расширения тел (т. е. расширения, сохраняющие группу значений), a-замкнутые a-расширения, вложения упорядоченных полей в поле формальных степенных рядов.

12. Некоммутативные расширения колец Гильберта. Кертис (Curtis C. W.). Пусть S — кольцо, R — подкольцо центра, содержащее единицу кольца S; S — конечный R-модуль и удовлетворяет условию максимальности для R-подмодулей. Указываются условия, при которых R будет кольцом Гильберта (Goldman, Math. Z., 1951, **54**, 136—140). Изучается связь представлений S и R. В качестве следствия получается конечномерность всех неприводимых представлений ассоциативной алгебры, порожденной алгеброй Ли степени n над полем K конечной характеристики.

13. О коммутативных линейных преобразованиях в бесконечномерных пространствах. Кертис (Curtis C. W.). Пусть A — линейное преобразование в счетно-мерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K. Доказывается, что при некоторых ограничениях на A коммутатор коммутатора A является замыканием в конечной топологии кольца многочленов $K[A]$.

14. Неотрицательные квадратные матрицы. Дебру, Херстейн (Debreu Gerard, Herstein I. N.). Указывается вид наибольшего по абсолютной величине собственного значения матрицы A с неотрицательными элементами. Приводятся условия, при которых сходится последовательность A^n степеней матрицы A с комплексными коэффициентами. Даются различные приложения этих результатов.

15. Заметки о булевых функциях. Эллис (Ellis D. O.). Рассматриваются функции $f(x) = ax + bx'$ в булевой алгебре B. Доказывается, что все функции f образуют кольцо (кольцо преобразований B); функции-константы образуют идеал, фактор-кольцо по которому изоморфно булеву кольцу, ассоциированному с B. Изучается специальный случай, когда $b \leqslant a$, и некоторые другие вопросы.

16. Кольца целых функций конечного порядка. Хенриксен (Henriksen Melvin). Рассматриваются кольца R_λ и R_∞ целых функций порядка $\leqslant \lambda$ и любого конечного порядка. Приводятся условия, при которых поле классов вычетов R_λ или R_∞ по максимальному идеалу изоморфно полю комплексных чисел.

17. Особая теория гомологий в ассоциативных алгебрах с единицей. Ху (Hu S. T.). При помощи полусимплициального комплекса определяются особые группы гомологий и когомологий для ассоциативной алгебры с единицей над полем действительных чисел. Специально рассмотрен случай алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

18. О кольцах дифференциальных операторов над полями простых характеристик. Егер (Jaeger Arno). Изучаются итеративные дифференцирования в смысле Шмидта (Schmidt F. K., J. reine und angew. Math., 1952, **190**) поля F характеристики $p \neq 0$ и связанные с ними эндоморфизмы аддитивной группы поля F.

19. Бесконечные общие линейные группы. Кадисон (Kadison R. V.).

20. Дуальные модули над нормированным кольцом. II. Каплански (Kaplansky Irving). Работа посвящена, главным образом, локально линейно компактным модулям над полными дискретно нормированными кольцами.

21. Простые альтернативные кольца. II. Клейнфелд (Kleinfeld Erwin). Доказывается, что простое альтернативное кольцо либо ассоциативно, либо является алгеброй Кели-Диксона.

22. О распределении по модулю 1 последовательностей, содержащих периодические функции. Ле Век (Le Veque W. J.). Строятся последовательности вида $\{u_n \varphi(v_n x - c)\}$, где φ — заданная периодическая функция, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ — последовательности из довольно широких классов, x — параметр. Эти последовательности равно распределены (mod 1) почти для всех x.

23. Пары матриц со свойством L. II. Моцкин, Таусская (Motzkin T. S., Taussky Olga).

24. Число неприводимых представлений простых колец без минимальных идеалов. Розенберг (Rosenberg Alex). Пусть A — простое счетное кольцо Цорна с единицей без минимальных идеалов; тогда A имеет $2^{\aleph_0}$ неэквивалентных неприводимых представлений. Пусть L — кольцо всех линейных преобразований векторного пространства размерности $\aleph$ над телом, содержащим не более $\aleph$ элементов, и F — максимальный идеал в L; тогда L/F имеет $2^{2^\aleph}$ неэквивалентных неприводимых представлений.

25. Обобщение теоремы Альберта. Шафер (Schafer R. D.). Обобщается теорема Альберта о телах, в которых ассоциативный закон выполняется для степеней одного элемента.

26. Теорема о факторизации, относящаяся к суммам однородных функций. Уэйнер (Weiner L. M.). Изучается кольцо функций, каждая из которых представима в виде суммы конечного числа однородных функций (разной степени).

27. Аддитивные многочлены. II. Уэйплс (Whaples George).

Анализ

28. Неограниченные спектральные операторы. Бэйд (Bade W. G.). Приводятся условия для того, чтобы неограниченный оператор был спектральным. Рассматриваются также свойства таких операторов.

29. Решения уравнений в банаховых пространствах. Бартл (Bartle R. G.). Изучается строение прообразов точек при отображении одного банахова пространства на другое, если отображение имеет дифференциал Фреше.

30. О неравенстве Привитца. Бернарди (Bernardi S. D.). Новый класс неравенств, связывающих коэффициенты разложения по степеням z регулярной и однолистной в единичном круге функции комплексного переменного.

31. Построение решений и оценка ошибок в нелинейных задачах. Блок (Block H. D.). Рассматривается итерационный процесс для решения уравнения $Fx = y$, где x и y — элементы двух аддитивных групп с инвариантной мерой. Проводится оценка ошибки при обрыве процесса, при вариации уравнения и т. п. (точные результаты не формулируются).

32. Нули некоторых рациональных функций. Боисалл, Марден (Bonsall F. F., Marden Morris). Для рациональных функций некоторого специального вида и производных от них указываются соотношения между числом корней, расположенных вне единичного круга.

33. Ядерная функция и инвариантная метрика в областях регулярности. Бремерман (Bremerman H. J.).

34. О функциях, имеющих изолированные особенности на положительной вещественной оси. Бранк (Brunk H. D.). Рассматривается асимптотическая оценка вычетов функции, голоморфной в полосе, за исключением изолированных особенностей на положительной вещественной оси.

35. О распространениях полиномов Бернштейна на бесконечный интервал. Батзер (Butzer P. L.). Изучаются свойства преобразования

$$W^f(u; x) = ue^{-ux} \sum_{v=0}^{\infty} [(ux)^v/v!] \times$$

$$\times \int_{v/u}^{(v+1)/u} f(s)\, ds \quad (u > 0,\ x > 0).$$

36. О проблеме аналитического представления поверхностей Фреше. Чезари (Cesari Lamberto). Сообщается новое доказательство, в более общих предположениях, теоремы о возможности представления двумерной поверхности конечной лебеговой площади в трехмерном пространстве при помощи отображающих функций, имеющих квадратично суммируемые первые производные.

37. Распространение итеративного процесса Брауна-Робинсона для нахождения значения игры. Данскин (Danskin J. M.). Это значение (в смысле теории игр) получается в результате некоторого итеративного процесса, известного ранее для матриц.

38. О разложении мер в ряды. Дуглас (Douglas Jim, Jr). Рассматривается представление вполне конечной меры измеримого пространства в виде ряда по мерам, принимающим только значения 0 и 1.

39. Спектральные операторы. Данфорд (Dunford Nelson). Оператор в комплексном банаховом пространстве называется спектральным, если для него существует разложение единицы, определенное на борелевских множествах плоскости. Изучаются такие операторы, в частности, их каноническое разложение и связанные с этим свойства.

40. Выпуклость функционалов, определенных на областях. Гарабедян, Шиффер (Garabedian P. R., Schiffer M. M.).

41. Теорема о дифференциальных уравнениях на двумерных многообразиях. Хаас (Haas Felix).

42. Лакунарные множества целых чисел. Хелсон (Helson Henry). Обобщение двух классических теорем о лакунарных тригонометрических рядах.

43. О единственности обобщенных осесимметричных потенциалов. Хьюбер (Huber Alfred). Рассматриваются решения уравнения $y\Delta u + ku'_y = 0$ на плоскости, определенные выше оси x и равные нулю на некотором отрезке этой оси.

44. Теорема о расширении для конечно-аддитивных мер. Келли (Kelley J. L.). Формулируется теорема о возможности расширения неотрицательной аддитивной функции с подалгебры булевой алгебры на всю эту алгебру, при наличии соответствующим образом определенной мажоранты.

45. Суммы и асимптотические суммы рядов, связанных с гармоническими рядами. II. Кламкин (Klamkin M. S.).

46. Инвариантное расширение линейных функционалов. Кли (Klee V. L., Jr). Устанавливается теорема о продолжении линейного функционала, при котором сохраняется мажорируемость данным полуаддитивным функционалом и инвариантность относительно данного множества линейных преобразований. Отмечается ряд следствий.

47. Линейные функционалы в пространствах Кете. Лоренц, Вертгейм (Lorentz G. G., Wertheim D. G.). Указывается общий вид линейного функционала на пространстве слабо измеримых функций, определенных на вещественном отрезке, со значениями в банаховом пространстве при соответственно введенной норме («по Кете»).

48. Искажения римановой поверхности арксинуса. Мак-Лейн (MacLane G. R.). Указан класс таких искажений и вид аналитического представления получающихся поверхностей.

49. Инвариантные относительно переноса алгебры функций на компактных группах. II—V. Миркил (Mirkil Hazleton). II. Рассматривается «левооднородная» (см. предыдущее сообщение в Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 6, 642) алгебра (нормированное кольцо) функций на компактной (бикомпактной) группе; устанавливается изоморфизм трех основных структур, связанных с этой алгеброй. III. В предположениях предыдущего абзаца вводится определение алгебр «типа C» и устанавливается их связь с алгебрами, имеющими единственный максимальный идеал. IV. В алгебре, по-

рожденной непрерывными положительно определенными функциями на компактной группе, каждый замкнутый немаксимальный идеал лежит в более чем одном максимальном. V. Однородная алгебра на мультипликативной группе унимодулярных комплексных чисел либо квазианалитична в смысле Мандельбройта, либо регулярна в смысле Шилова.

50. Полиномы с наименьшей p-й степенью на конечном множестве действительных точек. Моцкин, Уолш (Motzkin T. S., Walsh J. L.). Для заданных действительных различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ищется полином

$$T_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (0 < n < m)$$

с вещественными корнями, минимизирующий выражение

$$\sum_1^m \mu_i \, | \, T_n(x_i) \, |^p,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_m$, p заданы и положительны.

51. Меры в булевых алгебрах. Меррей (Murrey G. G.). Строится разложение ограниченной конечно-аддитивной меры в булевой алгебре на сумму максимальной счетно-аддитивной и конечно-аддитивной мер. Последняя характеризуется более точно, чем в аналогичной теореме Иосида и Хьюита (Iosida, Hewitt, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 46—66).

52. О равномерной полноте множеств функций, обратных линейным. II. Порчелли (Porcelli Pasquale). Рассматриваются свойства замкнутых и незамкнутых множеств $\{(1 + k_p x)^{-1}\}_{p=1}^{\infty}$ в пространстве L^2 [0,1] (начало см. в Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, № 6, 649).

53. Многозначно звездообразные функции. Робертсон (Robertson M. S.). Усиливается результат Гудмэна (Goodman A. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 204—223). Доказывается, что если функция $a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ регулярна и многозначно звездообразна порядка 2 относительно начала в $|z| < 1$, то $6\,|a_n| \leqslant 2n\,|n^2 - 4|\,|a_1| + n\,(n^2 - 1)\,|a_2|$ для всех натуральных n.

54. Решение системы уравнений, применяемое при подсчете полной системы семитензоров. Робинсон (Robinson L. B.). Строятся три решения специальной системы девяти линейных уравнений с частными производными с одной искомой функцией.

55. Обобщенное исчисление, связанное с дифференциальными уравнениями в частных производных. Робинсон (Robinson L. V.). Строится исчисление операторов $\lambda \equiv p_1 \partial / \partial x_1 + p_2 \partial / \partial x_2 + \ldots + p_n \partial / \partial x_n \, (p_i = p_i(x_1, \ldots, x_n))$ и им обратных, аналогичное дифференциальному и интегральному исчислению. Соответствие между λ и d/dx позволяет при помощи решения обыкновенных дифференциальных уравнений получить формальное решение большого количества уравнений в частных производных.

56. Исследования уравнений Максвелла. I. Розенблюм (Rosenbloom P. C.). Указывается выражение общего решения уравнения $\nabla \times Q + \beta Q = A$ (Q — искомый вектор) через общее решение уравнения $\Delta R + \beta^2 R = A$ и при помощи ряда по функциям, аналогичным сферическим гармоникам.

57. Некоторые топологические следствия существования мер. Шерф (Schaerf H. M.). Приводятся три следствия (топологического характера) существования σ-конечной счетно-аддитивной меры в топологическом пространстве вообще и в топологической группе, в частности.

58. Абстрактные краевые значения. Шварц (Schwartz J. T.). Сообщение о ряде работ по теории расширения симметричных (в том числе дифференциальных) операторов.

59. Существенные спектры дифференциальных операторов. Шварц (Schwartz J. T.). Отмечается ряд свойств существенного спектра (являющегося дополнением в спектре к совокупности изолированных точек конечной кратности) для самосопряженных операторов, порожденных обыкновенными дифференциальными операторами.

60. О производных функций множеств. Снайдер (Snyder W. S.) Указывается новый процесс, приводящий к интегралу от верхней производной функции замкнутых подмножеств плоского ограниченного открытого множества.

61. Теоремы о неколебании и о сравнении для линейных дифференциальных уравнений с комплекснозначными коэффициентами. Там (Taam C. T.). Для уравнения $W'' + Q(x)W = 0$ (x вещественно, W и Q комплексны) приводятся критерии, достаточные для того, чтобы каждое нетривиальное решение имело не более одного нуля.

62. О комплексных нулях функций типа Штурма — Лиувилля. Там (Taam C. T.). Приводится теорема о расположении в комплексной плоскости нулей решений уравнения $W'' + Q(z)W = 0$, где $Q(z)$ аналитична.

63. Собственные значения формы Теплица. II. Алман (Ullman J. L.). Изучается расположение собственных значений формы $\sum_{i,j=0}^{n} \left(c_{j-i} + g\left(\frac{i}{n}\right)\delta_{i,j} \right) x_i \bar{x}_j$, где c_k — комплексные коэффициенты Фурье, а $g(x)$ определена на [0,1]. Результат применяется к асимптотическому (при $n \to \infty$) выражению детерминанта этой формы.

64. Связность предельных множеств. Уц (Utz W. R.). Утверждается, что для регулярного непрерывного потока в метрическом пространстве ω-предельное множество любой траектории является минимальным (если оно не пусто), а потому связным.

65. Хаусдорфовские средние с выпуклыми функциями масс. Уолл (Wall H. S.). Приводятся различные формулировки необходимого и достаточного условия, чтобы регулярный метод хаусдорфовских средних с данной функцией масс включал метод чезаровских средних.

Прикладная математика

66. Отклонение от положения равновесия закрепленной прямоугольной пластинки. Аронсайн (Aronszajn Nachman). Указывается метод для определения этого отклонения, дающий также оценку ошибки.

67. Замечание о преобразованиях прикосновения. Блок (Block H. D.). Строится преобразование прикосновения (контактная трансформация), которое не порождается никаким из четырех ранее известных общих методов.

68. Математический анализ линеаризаций уравнений сверхзвукового потока. Чжень (Chen Y. W.).

Решение уравнений сверхзвукового осесимметричного потока (без учета вязкости и теплопроводности) для простых краевых условий, полученное при помощи обычной линеаризации, сравнивается с точным.

69. Операционное исчисление преобразований Лежандра. Черчилл (Churchill R. V.). Изучаются свойства и применения преобразования

$$T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} F(x) P_n(x)\, dx,$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

70. Некоторые внутренние соотношения, связывающие векторы скорости и вихря в динамике жидкости. Коберн (Coburn Nathaniel). Указывается ряд свойств поля скоростей и поля вихрей трехмерного потока.

71. Вырожденная задача Больца с разделенными условиями для концов. Фолкнер (Faulkner Frank). Ищется кривая, вдоль которой $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, на концах $G_i(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $H_i(x_1, y_1, z_1) = 0$, максимизирующая выражение $F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0)$ (в тексте опечатка: $F(x_1, y_1, z_1) - F(x_1, y_1, z_1)$).

72. Об одном интеграле, встречающемся в теории антенны с большой скоростью вращения. Феттис (Fettis H. E.)

73. Сходимость метода присоединенного градиента в гильбертовом пространстве. Форсайт (Forsythe G. E.). Исследуется скорость сходимости этого нового метода приближенного решения уравнения $Ax = b$, где A — самосопряженный ограниченный положительно определенный оператор в вещественном гильбертовом пространстве.

74. Об одной нелинейной краевой задаче. Гохен (Goheen H. E.). Рассматривается краевая задача $\varphi^3\varphi'' + \varphi^2\varphi'^2 + v\varphi' = 0$, $\varphi(0) = a_0 < 1$, $\varphi(\infty) = 0$.

75. Вращение вписанных кривых. Голдберг (Goldberg Michael). Рассматриваются применяемые в технике примеры вращения выпуклой кривой, остающейся вписанной в другую выпуклую кривую.

76. Равенство, связывающее виртуальную массу и поляризацию. Пейн (Payne L. E.). Для осесимметричного тела выводится соотношение между компонентами тензоров виртуальной массы и поляризации (Schiffer M., Szegö G., Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 130—205).

77. Сокращенный метод группировки для решения разностного уравнения Лапласа. Солцер (Saltzer Charles). Вводится аналог альтернирующего метода решения граничной задачи для уравнения Лапласа.

78. Некоторые теоремы о сравнении для дозвукового газового потока. Серрин (Serrin J. B., Jr). Сравниваются скорости двух плоских или двух осесимметричных безвихревых потоков идеальной несжимаемой жидкости, однородных на бесконечности, если ограничивающие их линии тока имеют общую дугу.

79. Положительные температуры полубесконечного стержня. Уиддер (Widder D. V.). Рассматривается уравнение $u_{xx} = u_t$ для полубесконечного стержня. Доказывается, что если решение $u(x, t)$ неотрицательно для $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$ и $\lim u(x, t) = 0$ для каждой граничной точки этого квадранта, то $u(x, t) \equiv 0$ в квадранте.

Геометрия

80. О связке касательных, группах голономии и о кручении. Калаби (Calabi Eugenio).

81. Теорема Паскаля в пространстве. Корт (Court N. A.).

82. Обобщение каснеровской обратной теоремы для теоремы Мёнье в римановом пространстве. Де Чикко (De Cicco John).

83. Развитие обобщенного внешнего дифференциального исчисления. Фландерс (Flanders Harley).

84. Обращение плоского процесса симметризации. Хаммер (Hammer P. C.).

85. Специальные физические системы динамических траекторий, цепных линий, брахистохрон и кривых скоростей в римановом пространстве. Каснер, Де Чикко (Kasner Edward, De Cicco John).

86. Тензорные связности. Ланцано (Lanzano Paolo).

87. О жесткости тора. Минагава, Радо (Minagava T., Radó Tibor).

88. О теореме Де Рама для произвольного пространства. Шварц (Schwartz J. T.).

89. Перпендикулярность в абсолютной геометрии. Уайлер (Wyler Oswald).

90. Теория эквивалентности алгебраических многообразий и определение многообразий Пикара. Барсотти (Barsotti Iacopo).

Основания математики и математическая логика

91. Преобразования систем релятивистской механики частиц. Рубин, Сапс (Rubin Hermann, Suppes P. C.). Дается система аксиом для релятивистской механики частиц (в смысле специальной теории относительности) и устанавливается ряд теорем о преобразовании этой системы.

92. Об основаниях геометрии. Швейцер (Schweitzer A. R.).

93. О переходе от анализа пространства Грассмана к комбинаторной топологии. Швейцер (Schweitzer A. R.).

94. Топологические проблемы в основаниях геометрии. Швейцер (Schweitzer A. R.).

В докладах 92—94 выявляются топологические понятия, связанные со всеми видами оснований геометрии, и на основе этих понятий дается единая форма для различных видов обоснования (описательного, метрического, проективного). Топологическая форма оснований геометрии распространяется также на анализ пространства Грассмана и на комбинаторную топологию. Имеется ссылка на работу автора из Amer. J. Math., 1909, **31**, 365—410.

Теория вероятностей и математическая статистика

95. Предельная теорема для двумерного броуновского движения. Спицер (Spitzer F. L.).

Пусть $X_i(t)$ — независимые процессы Винера с $X_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Положим $R_2(t) = [X_1^2(t) + X_2^2(t)]^{1/2}$, $P_2 = P\{R_2(t) < t^{1/2}\varphi(t)$ для произвольно больших $t\}$. Тогда P_2 равно 0 или 1 в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\log \varphi(2^k)]^{-1}.$$

96. Угловая составляющая двумерного броуновского движения. Спицер (Spitzer F. L.).

Топология

97. Однородные одномерные компактные непрерывные кривые. Андерсон (Anderson R. D.).

98. Некоторые теоремы о спиралях на плоскости. Болл (Ball B. J.).

99. О понтрягинском произведении. Ботт, Замельсон (Bott Raoul, Samelson Hans).

100. Гомеоморфизмы дифференцируемых многообразий. Чеймберлин, Вулф (Chamberlin R. E., Wolfe J. H.).

101. Относительно неприводимости суммы элементов непрерывной совокупности континуумов. Дайер (Dyer Eldon).

102. Топология в B-метризуемых пространствах. Эллис, Спринкл (Ellis D. O., Sprinkle H. D.).

103. Условие для того, чтобы расслоенное пространство было $E - F$-произведением. Гриффин (Griffin J. S., Jr).

104. Представление функций при помощи преобразования Фурье — Стилтьеса. Хьюит (Hewitt Edwin).

105. О некоторых вполне упорядоченных монотонных совокупностях множеств. Джонс (Jones F. B.).

106. Теорема существования для непрерывных функций. Майкл (Michael E. A.).

107. Локально топологические кольца. Торалбалла (Toralballa L. V.).

108. Комплексные вполне параллелизуемые многообразия. Ван (Wang H. C.).

109. Частично упорядоченные пространства. I. Уорд (Ward L. E., Jr).

1519. Осеннее заседание Японского математического общества. Такасу (Autumn meeting of the Japanese Mathematical Society, Kyoto University, November 3—6, 1952. Takasu T.), Intern. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 4—5 (англ.)

Приводятся названия докладов, прочитанных на заседаниях Японского математического общества с 3 по 6 ноября 1952 г. В частности, приведены следующие доклады:

Теория потенциала. Каметани (Kametani S.). Принцип Дирихле. Комацу (Komatsu Y.). О новой теории унитарного поля Эйнштейна и Шредингера. Икеда (Ikeda M.). О существовании булевой алгебры и меры. Эмото (Emoto S.). О теории информации. Такахаси (Takahashi H.). Применение вариационного исчисления. II. Като (Kato T.). О теории множеств предельных точек аналитических функций. Носиро (Noshiro K.). Связные пространства в целом: I. Неголономные пространства с общей линейной связностью. II. Неголономная аффинная геометрия. III. Неголономная евклидова геометрия. IV. Неголономная геометрия Лагерра второго рода. V. Неголономная конформная геометрия. VI. Неголономная геометрия Ли и неголономная параболическая геометрия Ли. VII. Неголономная проективная геометрия. Такасу (Takasu T.). Общая теория относительности как трехмерная неголономная геометрия Лагерра и ее квантовая механика. Такасу (Takasu T.) Об n-мерном пространстве Римана, допускающем группу порядка $(n-1)\,n/2$. Яно (Yano K.). О нелинейной краевой задаче для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Накамори (Nakamori K.). Об общей многозначной логике. Ито (Ito M.). О проблеме общих делителей Хассе-Суетсуна. Исеки (Iseki K.). Об общей теореме Римана-Роха. Исеки (Iseki J.).

1520. Международный конгресс математиков 1954 года (International Congress of Mathematicians 1954), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 3, 224 (англ.)

Официальное сообщение секретаря организационного комитета Коксма (J. F. Koksma) о предстоящем в сентябре 1954 г. Международном математическом конгрессе в г. Амстердаме.

1521. Наука и ее роль в общественном развитии. Пивцайкин Г. И., Изв. АН БССР, 1953, № 3, 3—21

1522. Международная математическая премия в память Гвидо Фубини (Guido Fubini 記念國際數學賞), 數學 (Сугаку), 1953, **4**, № 4, 64 (япон.)

Итальянское математическое общество (Unione Matematica Italiana) приняло решение учредить в память Гвидо Фубини международную математическую премию (в денежной форме) за выдающийся труд в области дифференциальной геометрии, вышедший в свет за период с 1 января 1946 г. по 31 декабря 1953 г. Комитет по присуждению премии будет рассматривать как представленные ему, так и не представленные учеными-математиками труды, опубликованные в указанный срок.

1523. Геометрические пространства в электротехнике. Кучера (Geometrické prostory v elektrotechnice. Kučera Jaroslav), Elektrotechn. obzor, 1953, **42**, № 1, 5—12 (чеш.)

Отмечается возросшее значение геометрических методов в электродинамике и теоретической электротехнике и излагаются определения основных типов пространств, встречающихся в электротехнических применениях (афинное; различные типы конечномерных метрических пространств, включая спинорное; гильбертово). Статья представляет собой первую часть публикации. *А. И. Узков*

1524. О задачах математики на службе технического прогресса. Фрюауф (Über die Aufgaben der Mathematik im Dienste fortschrittlicher Ingenieurarbeit. Frühauf Hans), Technik, 1953, **8**, № 6, 407—410 (нем.)

В связи с тем, что физические и технические процессы происходят в соответствии с объективно действующими закономерностями, и что задачей инженера является наиболее рациональная и целесообразная формулировка и применение этих закономерностей, обсуждаются сравнительные недостатки и преимущества математического и экспериментального решения технических вопросов. Не подлежит сомнению, что с точки зрения прогрессивного, научно мыслящего инженера математике принадлежит значительное место в осуществлении технического прогресса. Однако для последнего также необходимо творческое содружество между теоретиками и работниками производства. На примере производства радиоламп иллюстрируется возможность практического применения математической статистики. *В. И. Левин*

1525 РЕЦ. **Высшая математика. Рей-Пастор** (La matematica superior. Rey Pastor J., Metodos y problemas del siglo XIX. Vol. 1, pp. 360, Buenos Aires, Madrid, 1951) [**Рецензия: Бу-лиган** (Bouligand G.), Arch. internat. histoire sci., 1953, **6**, № 22, 110—111 (франц.)]

1526 РЕЦ. **Элементы математики. Часть I. Структура основ анализа. Том 2. Алгебра. Бурбаки** (Eléments de mathématiques. Première partie: les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitres VI et VII, Bourbaki N., pp. 160, Hermann, P., 1952) [**Рецензия: Руссо** (Russo F.), Rev. questions scient., 1953, **14**, avril, 283—284 (франц.)]

1527 РЕЦ. **Элементы математики. Часть I. Структура основ анализа. Том 5. Векторные топологические пространства. Бурбаки** (Eléments de mathématique. Première partie: les structures fondamentales de l'analyse. Livre V: Espaces vectoriels topologiques. Chapitres I et II. Bourbaki N., pp. 118, Hermann, P., 1953) [**Рецензия: Руссо** (Russo F.), Rev. questions scient., 1953, **14**, avril, 284 (франц.)]

1528 РЕЦ. **Математический репетиторium. Людвиг** (Mathematik-Repetitorium. Ludwig Emil, zweite Auflage, S. 192, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1951) [**Рецензия: Люсси** (Lüssy Willy), Elem. Math., 1953, **8**, № 4, 96 (нем.)]

1529 РЕЦ. **Математика как наука, искусство и сила. Хассе** (Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht. Hasse H., 36 S., Wiesbaden, Verlag für angewandte Wissenschaften, 1953, 4.80 DM) [**Рецензия: Прахар** (Prachar K.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 2, 171—172 (нем.)]

1530 РЕЦ. **Прогресс науки. Паттен, Корнер, Джессел, Маллер, Соннеборн, Уайкофф, Андерсон, Даниэлс, Даннинг, Артин, Симпсон, Фьюосс** (Science in Progress. Patten Bradley M., Corner George W., Gessel Arnold, Muller H. J., Sonneborn T. M., Wyckoff Ralf W. G., Anderson Carl D., Daniels Farrington, Dunning J. R., Artin Emil, Simpson George Gaylord, Fuoss Raymond M., pp. XVII + 512, Oxford University Press, London, 1951, 40 s. net.) [**Рецензия: Самнер** (Sumner W. L.), Nature, 1953, № 4362, 990 (англ.)]

В рецензируемый сборник наряду с работами по зоологии, физике и другим наукам входит статья Э. Артина по теории кос.

1531 РЕЦ. **Числа и пространства. Верриест** (Les nombres et les espaces. Verriest Gustave, S. 188, Collection Armand Colin, Paris, 1951) [**Рецензия: Люсси** (Lüssy Willi), Elem. Math., 1953, **8**, № 4, 94 (нем.)]

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1532. **Арифметические проблемы и рекурсивно-перечислимые предикаты. Дейвис** (Arithmetical problems and recursively enumerable predicates. Davis Martin), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 33—41 (англ.)

Диофантовым предикатом (д. п.) называется всякий предикат вида $(Ex_1, x_2, \ldots, x_n)\ (P = Q)$, где P и Q — полиномы с натуральными коэффициентами. Известно, что всякий д. п. является рекурсивно перечислимым (р. п.), но неизвестно пока, верно ли обратное утверждение. Этот вопрос тесно связан с одной из проблем Гильберта, заключающейся в том, что для всякого данного диофантова уравнения требуется узнать, имеет ли оно рациональное решение или нет; если бы всякий р. п. предикат являлся д. п., то существовали бы алгорифмически неразрешимые д. п., а значит и проблема Гильберта также оказалась бы алгорифмически неразрешимой. Не решая полностью этой задачи, автор устанавливает следующий результат:

Для того чтобы предикат, зависящий от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, был р. п., необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде

$$(Ey)\,(k)\,[k \leqslant y \to D\,(k, x_1, \ldots, x_n, y)],$$

где D является диофантовым предикатом.

Б. А. Трахтенброт

1533. **Некоторые предикаты, определенные индуктивными схемами. Ван Хао** (Certain predicates defined by induction schemata. Wang Hao), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 49—59 (англ.)

Индуктивно определенными (и. о.) называются предикаты, заданные в формализованной арифметике индуктивной схемой вида

$$(D)\ \begin{cases} P\,(n, 0) \equiv Q\,(n) \\ P\,(n, k+1) \equiv R\{n, k, P\,[f_1(n, k. m_1, \ldots, m_i), h_1(k)], \ldots \\ \qquad \ldots, P\,[f_j\,(n, k, m_1, \ldots, m_i),\ h_j\,(k)]\}, \end{cases}$$

в которой, кроме символа P, встречаются лишь арифметические символы; i, j — константы; переменные $m_1, \ldots, m_i$ все связаны кванторами; функции $f_1, \ldots, f_j, h_1, \ldots, h_j$ определимы в арифметике, причем для любого k доказуемы соотношения: $h_1(k) \leqslant k, \ldots, h_j(k) \leqslant k$.

Известно, что для некоторых и. о. предикатов не существует в рамках арифметики явного определения. Такие предикаты были рассмотрены Гильбертом и Бернайсом в связи с введением определения истинности для арифметического формализма Z, а также Клином в связи с классификацией предикатов по кванторным приставкам (Hilbert D., Bernays P; Grundlagen der Mathematik, Vol. II, Berlin, 1939; Kleene S. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **53**, 41—73).

Автор исследует некоторые расширения формализма Z, а также другие системы, в которых всякий и. о. предикат P можно явно определить посред-

ством формулы, не содержащей символа P, для которой доказуемы оба предложения схемы (D).

Так, например, система L_1 получается присоединением к формализму Z переменных X, Y, ... для классов натуральных чисел, отношения принадлежности $m \in X$, а также аксиом:

Ах 1. $(X)\{0 \in X \,\&\, (m)[m \in X \to m+1 \in X] \to (n)\, n \in X\}$.
Ах 2. $m = n \to (m \in X \to n \in X)$.

Ах 3. О существовании классов: для каждого предложения p из L_1, не содержащего Y, $(EY)\{(m)[m \in Y \equiv p]\}$.

В L_1 и в других подобных системах, рассмотренных автором, можно полностью формализовать доказательство непротиворечивости арифметики Генцена, а также доказательство Гильберта — Бернайса посредством определения истинности.

Б. А. Трахтенброт

1534. Конструктивность максимальных дуальных идеалов в некоторых булевых алгебрах. Декер (The constructivity of maximal dual ideals in certain boolean algebras. Dekker J. C. E.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, 73—101 (англ.)

Как известно, при помощи аксиомы выбора доказывается теорема: всякий собственный дуальный идеал в булевой алгебре содержится в некотором максимальном дуальном идеале. В работе исследуется возможность конструктивного доказательства частных случаев этой теоремы для булевой алгебры V всех подмножеств натурального ряда и булевой алгебры E всех его рекурсивных подмножеств. Формулируются следующие определения:

Подкласс S класса F всех рекурсивно перечислимых подмножеств натурального ряда рекурсивно перечислим, если S либо пуст, либо состоит из одного пустого множества, либо таков, что имеется общая рекурсивная функция f двух переменных, удовлетворяющая условию: непустое множество α тогда и только тогда принадлежит S, когда существует m такое, что α есть совокупность значений $f(m, y)$ как функции y.

Дуальный идеал I в E (соответственно в V) конструктивен в первом смысле, если I (соответственно $I \cap F$) рекурсивно перечислим; I конструктивен во втором смысле, если существует рекурсивно перечислимый подкласс S класса E (соответственно F) такой, что I есть совокупность всех элементов класса E (соответственно V), содержащих элемент класса S; I есть атомный идеал в E (соответственно в V), если существует такое число k, что I есть совокупность всех элементов класса E (соответственно V), содержащих k в качестве элемента.

Доказываются следующие теоремы:

1. При обоих определениях конструктивности дуального идеала имеет место утверждение: максимальный дуальный идеал в E (соответственно в V) тогда и только тогда конструктивен, когда он атомен.

2. Для E два определения конструктивности дуальных идеалов эквивалентны. Для V второе определение налагает существенно более жесткое ограничение, чем первое.

Пусть P означает класс подмножеств натурального ряда, имеющих конечные дополнения; Q — класс конечных подмножеств натурального ряда; $D = E \setminus (P \cup Q)$. Классы E, F, P, Q рекурсивно перечислимы. С другой стороны, никакой класс S такой, что $D \subset S \subset F \setminus Q$, не является рекурсивно перечислимым. В частности, не являются рекурсивно перечислимыми классы D, $D \cup P$, $F \setminus (P \cup Q)$, $F \setminus Q$.

Из теоремы 1 следует, что класс P, являющийся собственным дуальным идеалом как в E, так и в V, не содержится ни в каком максимальном дуальном идеале в E (соответственно в V), конструктивном в одном из указанных смыслов.

Будем понимать под расширением P в E (соответственно в V) дуальный идеал в E (соответственно в V), содержащий P.

Пусть $P_E(\alpha)$ (соответственно $P_V(\alpha)$) означает наименьшее расширение P в E (соответственно в V), содержащее в качестве элемента множество α. Расширение I дуального идеала P в E (соответственно в V) называется: простым расширением P в E (соответственно в V), если имеется принадлежащее E (соответственно V) множество α такое, что $I = P_E(\alpha)$ (соответственно $I = P_V(\alpha)$); полупростым расширением P в E (соответственно в V), — если имеется последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ элементов множества E (соответственно V) такая, что

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_E(\alpha_i) \quad \text{(соответственно } I = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_V(\alpha_i)\text{)}. \quad (1)$$

Для простых расширений класса P устанавливаются следующие результаты: всякое простое расширение P в E рекурсивно перечислимо; если множество α рекурсивно перечислимо, то класс $P_V(\alpha) \cap F$ рекурсивно перечислим; если $\alpha \in V \setminus (P \cup Q)$, то $P_V(\alpha) \cap F = P$ тогда и только тогда, когда дополнение α бесконечно и α не содержится ни в каком рекурсивно перечислимом множестве с бесконечным дополнением. Доказывается, что класс таких множеств α имеет мощность континуума, так же как и класс бесконечных множеств, не имеющих бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств.

Для полупростых расширений класса P устанавливаются следующие результаты: всякое расширение P в E есть полупростое расширение P в E; никакое максимальное расширение P в V не является полупростым; полупростое расширение I дуального идеала P в E тогда и только тогда рекурсивно перечислимо, когда имеется рекурсивно-перечислимая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ элементов множества E, удовлетворяющая условию (1); существуют полупростые расширения P в E, не являющиеся рекурсивно перечислимыми.

Автор пользуется классическими средствами (закон исключенного третьего и т. п.). Референтом замечены следующие опечатки:

на стр. 88, 7 строка сверху, вместо «third» должно быть «fourth»,
на стр. 91, 6 строка сверху, вместо $(\alpha - \nu(n))$ должно быть $L(\alpha - \nu(n))$,
на стр. 95, последняя строка, вместо «simple» должно быть «semisimple»,
на стр. 96, 11 строка сверху, вместо «in P» должно быть «of P»,
на стр. 98, 13 строка сверху, вместо «T 2,5» должно быть «T 2. 1.5».

А. А. Марков

1535. Алгебра реле. Карльссон (Raläalgebra. Karlsson S. A.), Tekn. fören. Finland. förhandl., 1953, **3**, № 3, 45—54 (фин.)

Кратко излагается известная алгебраическая теория релейно-контактных схем, основанная на использовании булевой алгебры. Изложение ведется в обозначениях К. Шеннона, т. е. в обозначениях, двойственных тем, которые обычно применяются в работах советских ученых. Знаки (+) и (·) используются здесь для обозначения последовательного и параллельного соединения двухполюсников, а цифры 0 и 1 — для обозначения замкнутой и разомкнутой цепи соответственно.

Помимо схем, построенных исключительно из контактов, рассматриваются также схемы, содержащие конечные постоянные сопротивления. Приведен ряд примеров, показывающих, что применение двухполюсных мостиковых схем, построенных из контактных многополюсников, соединенных с многополюсниками из конечных сопротивлений, позволяет достичь большей экономии числа контактов, чем в случае использования схем, построенных только из контактов. В частности, всякую двухполюсную схему, зависящую от двух независимых реле, можно осуществить этим методом не более чем с двумя контактами.

Большое внимание автор уделяет вопросу о выборе наиболее простой системы алгебраических и графических обозначений. Статья заканчивается перечнем предлагаемых автором графических обозначений контактов различного типа. Ни в тексте статьи, ни в списке литературы работы советских авторов не упоминаются. В статье содержится несколько неправильных, не соответствующих тексту статьи чертежей схем (фиг. 26, 27, 28). В выражении функции, относящейся к схеме на фиг. 12, допущены опечатки. *В. И. Шестаков*

1536. Элементы логики в школьном курсе математики. Притуло Ф. Ф., Математика в школе, 1953, № 1, 25—35

Предлагается выделить в курсе математики IX—X классов средней школы время (16 час.) на изучение новой, не предусмотренной программой темы, посвященной выяснению логических элементов школьного курса (определения, аксиомы, теоремы, методы доказательств, необходимые и достаточные условия и т. п.). Приводится конспект этой темы. *А. И. Фетисов*

1537. Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей. Хинчин (Metoda functülor arbitrare si lupta impotriva idealismului in teoria probabitâ tilor. Hincin A. I.), An. Rom.-Sov., ser. matematicâ-fizica, 1953, **7**, № 2, 5—16 (рум.)

Перевод с русского языка статьи из сборника «Философские проблемы современной физики» (Изд-во АН СССР, 1952).

1538 РЕЦ. Введение в основания математики. Уилдер (Introduction to the foundations of mathematics. Wilder R. L., S. XIV + + 305, London, Chapman and Hall, Ltd., New York, J. Willey and Sons. Inc., 1952, 5.75 doll.) [**Рецензия: Шметтерер** (Schmetterer L.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 2, 170 (нем.)]

1539 РЕЦ. Рекурсивные функции и интуиционистская математика. Клин (Recursive functions and intuitionistic mathematics. Vol. I. Kleene S. C., pp. 679—685, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, August 30 — September 6, 1950, American Mathematical Society, 1952) [**Рецензия: Мостовский** (Mostowski Andrzej), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 181—182 (англ.)]

Указывается, что в сообщении Клина брауэровская теория множеств уточняется при помощи теории рекурсивных функций. Приводится следующая опечатка: в последней строчке примечания на стр. 683 статьи Клина вместо 2^{2^f} следует читать 2^{2_1}. *В. А. Успенский*

1540 РЕЦ. Многозначные логики. Россер, Тэркуэтт (Many-valued logics. Rosser J. B., Turquette A. R., pp. 124, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1952) [**Рецензия: Саган** (Sagan H.), Internat. math. Nachr. 1953, **7**, № 25/26, 48 (нем.)]

См. также: 1517, 1519, 1568, 1721

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1541. О принадлежащем Радемахеру обобщении теоремы Гольдбаха — Виноградова. Эйуб (On Rademacher's extension of the Goldbach-Vinogradoff theorem. Ayoub Raymond), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 482—491 (англ.)

Дается доказательство теоремы, являющейся обобщением теоремы Гольдбаха-Виноградова:

Пусть k — натуральное число и a_1, a_2, a_3 — заданные вычеты по модулю k, взаимно простые с k. Если n — достаточно большое нечетное число, сравнимое с $a_1 + a_2 + a_3$ по модулю k, то его можно представить в виде суммы трех простых чисел, сравнимых по модулю k с числами a_1, a_2, a_3 соответственно. Число таких представлений $A(n)$ дается формулой

$$A(n) = \mathfrak{S}(n)\,\frac{n^2}{2\,(\log n)^3} + O\left(\frac{n^2}{(\log n)^{7/2}}\log\log n\right),$$

где $\mathfrak{S}(n) > \text{const} > 0$ для указанных n.

Эта теорема была в 1926 г. условно доказана Радемахером при некоторых предположениях о нулях L-функций Дирихле. В своих рассуждениях автор следует известной работе Виноградова о проблеме Гольдбаха. Автор неточно формулирует предыдущие аддитивные результаты, не замечая, что условие $\mathfrak{S}(n) > 0$ недостаточно для представимости чисел суммами простых чисел. *А. А. Киселев*

1542. Видоизменение метода «решета Эратосфена», данное А. Селбергом. Ожигова Е. П., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 119—124

В 1946 г. А. Селберг (Selberg A., Norske Videnskabs. Selsk. Forh. Trondheim, 1947, **19**, № 18, 3—6) дал видоизменение «решета Эратосфена», позволяющее при определенных условиях находить верхнюю границу для числа чисел заданной конечной подпоследовательности целых чисел, которые не делятся ни на какое простое число $\leqslant z$. Методом А. Селберга обычно получаются оценки сверху лучшие, чем при применении хорошо известного до этого метода Виго Бруна. В реферируемой работе без существенных изменений дается подробное изложение содержания статей А. Селберга и И. В. Чулановского (Докл. АН СССР, 1948, **83**, № 5, 491—494).

А. А. Бухштаб

1543. Изолированные простые числа. Вальфиш А. З., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 5, 711—713

Автор называет простое число p «сильно изолированным», если ближайшее к p простое число q удовлетворяет условию

$$|q-p|>\frac{\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}.$$

Автор обозначает через $\rho(x)$ число «сильно изолированных» простых чисел $p\leqslant x$ и доказывает, что $\rho(x)\sim\pi(x)$, т. е., что почти все простые числа являются «сильно изолированными». В работе показывается также, что для любого k имеется ряд из k последовательных простых чисел $p_n, p_{n+1}, \ldots, p_{n+k-1}$, являющихся в то же время «сильно изолированными».

Доказательства этих результатов получаются очень просто путем использования оценки Бруна-Ширельмана для числа пар простых чисел p, q таких, что $p\leqslant x$ и $|p-q|=y$.

А. А. Бухштаб

1544. Простые делители элементов некоторой последовательности целых чисел. I. II. Лекеркеркер (Prime factors of the elements of certain sequences of integers. I. II. Lekkerkerker C. G.), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 265—280; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 265—280 (англ.)

Пусть ω и ω' — корни квадратного уравнения

$$x^2+ax+b=0,$$

дискриминант которого имеет положительный знак. Тогда в последовательности целых чисел:

$$u_n=\frac{\omega^n-\omega'^n}{\omega-\omega'}\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

почти все (т. е. за исключением, быть может, конечного числа) элементы обладают тем свойством, что для каждого u_n найдется такое простое q, для которого справедливы соотношения:

$$q\nmid u_n,\ q\mid u_m\quad(m=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Доказательство базируется на одном асимптотическом свойстве функции $\varphi(n)$, которое было доказано Ландау (Landau E., Arch. Math. und Phys., 1903, (3), **5**, 86—91).

Н. Г. Чудаков

1545. Представления кубическими сравнениями. Коэн (Representations by cubic congruences. Cohen Eckford), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 2, 119—126 (англ.)

Используя свойства кубических сумм Гаусса

$$S(z,p)=\sum_{x=0}^{p=0}\varepsilon(zx^3,p),$$

где

$$\varepsilon(a,p)=e^{2\pi ia/p},$$

автор доказывает: 1) число решений сравнения $\alpha\equiv x_1^3+x_2^3+x_3^3\pmod p$, где p простое число $\equiv 1\pmod 3$ и α некоторый его кубический вычет, равно p^2+6p-A, где A число решений (a,b) системы $a\equiv 1\pmod 3$, $4p=a^2+27b^2$, $b>0$; 2) число решений сравнения $x_1^3+x_2^3+x_3^3\equiv 0\pmod p$ равно $p^2+(p-1)A$.

Б. Д.

1546. О теории условных уравнений в конечных полях. Вандивер (On a theory of conditional equations in finite fields. Vandiver H. S.), Science, 1953, **117**, № 3044, 472 (англ.)

Приводятся замечания о сравнении $x^m+ay^n+b\equiv 0\pmod p$, где p простое и $xyabmn\not\equiv 0\pmod p$.

1547. О распределении целых точек при сдвиге множеств. Хартман (Zur Gitterpunktverteilung bei Verschiebungen von Mengen. Hartman S.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 1, 87—93 (нем.)

Пусть E — множество лебеговой меры $|E|$ в R^n, определенное с точностью до сдвига; пусть A — фиксированная точка множества E и $g(x)$ — число целых точек, принадлежащих E, когда A занимает положение x; пусть W означает n-мерный куб $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$. Обозначим через M_s $(s=0,1,2,\ldots,\infty)$ множество точек $x\in W$, для которых $g(x)=s$. Пусть, наконец, $D_k(P)$ означает плотность некоторого свойства P в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, т. е. предел при $N\to\infty$ отношения N'/N, где N' — число элементов a_k $(1\leqslant k\leqslant N)$, обладающих свойством P.

Теорема 1. Если компоненты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вектора ξ таковы, что соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}t_i\xi_i=t_{n+1}$$

не может иметь места ни при каких целых $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$, не обращающихся одновременно в нуль, то для почти всех x

1) $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}g(x+k\xi)=|E|$,

2) $D_k\{g(x+k\xi)=s\}=|M_s|$ $(s=0,1,2,\ldots,\infty)$,

3) $\sum\limits_{s=1}^{\infty}sD_k\{g(x+k\xi)=s\}=|E|$.

Теорема 2. Если при тех же предпосылках относительно чисел ξ_i множество E ограничено и измеримо по Жордану, то соотношения 1) —3) имеют место при любом x.

А. Я. Хинчин

1548. **Поправка к работе «Обобщение теоремы Мейера о неопределенных тернарных квадратичных формах». Джонс** (Correction to «An extension of Meyer's theorem on indefinite ternary quadratic forms». Jones B. W.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 2, 271—272 (англ.)

Поправка автора к работе, напечатанной ранее (Canad. J. Math., 1952, **4**, 120—128).

1549. **Магические круги. Мак-Иннис** (Magic circles. McInnis S. W.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 347—351 (англ.)

«Магический круг» конструируют из $R+1$ концентрических кругов, разделенных на секторы n диаметрами или N радиусами. В центральный круг помещают произвольное число C, а ряд последовательных чисел от a до b размещают в секторах так, чтобы выполнялись условия, указанные ниже.

Пусть S_d, S_r и S_o — соответственно суммы всех проставленных чисел вдоль диаметров, радиусов и колец (число C в состав сумм S_o не входит).

Если числа размещены так, что

$$S_{d_1} = S_{d_2} = \ldots = S_{d_n}, \qquad (1)$$

то «магический круг» называется простым.

Если, кроме того,

$$S_{r_1} = S_{r_2} = \ldots = S_{r_N} \qquad (2)$$

и

$$S_{o_1} = S_{o_2} = \ldots = S_{o_R}, \qquad (3)$$

то «магический круг» называется смешанным, а при $N = R$ — совершенным.

Приводится несколько примеров «магических кругов». *Б. А. Кордемский*

1550. **Магические квадраты. Палама** (Quadrati magici. Palamà Giuseppe), Illustr. scient., 1953, **5**, № 38, 22—25 (итал.)

Описываются способы составления обыкновенных «магических» квадратов из n^2 ($n = 3,4,\ldots$) последовательных целых чисел, начиная от 1, обобщенных «магических» крадратов, а также «магических» кубов. *Б. А. Кордемский*

1551. **Задачи «расчистки». V. Треугольники, имитирующие арифметический треугольник Паскаля. Дюфрен** (Problèmes de dépouillements. V. Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal. Dufresne Pierre), Gaz. mat., 1953, **14**, № 54, 14—17 (франц.)

1552. **Математическое развлечение** (A mathematical recreation), Duodecimal Bull., 1953, **9**, № 1, 24 (англ.)

Рассматривается в двенадцатиричной системе счисления задача: найти дроби, которые не меняются от замены числителя и знаменателя на произведение своих цифр. *В. Д. Подсыпанин*

1553. **Изменение системы счисления. Стивенс** (Hand base changing by summation. Stevens H. F.), Duodecimal Bull., 1953, **9**, № 1, 15—18 (англ.)

Приводится таблица, облегчающая переход от десятичной системы счисления к двенадцатиричной. *В. Д. Подсыпанин*

1554. **Число обратное к 3937. Бирд** (The reciprocal of 3937. Beard Ralph H.), Duodecimal Bull., 1953, **9**, № 1, 19, IX (англ.)

Рассматриваются особенности разложения отношения дюйма к метру в дробь по десятичной и двенадцатиричной системе счисления.

В. Д. Подсыпанин

1555 **РЕЦ. Высшая арифметика. Давенпорт** (The higher arithmetic. Davenport H., pp. 172, London, Hutchinson's University Library, 1952, 8s. 6d). [**Рецензии: Радо** (Rado R.), Sci. Progress, 1953, **41**, № 163, 508—509 (англ.); **Главка** (Hlawka E.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 2, 173—174 (нем.)]

1556 **РЕЦ. Введение в теорию чисел. Нейсс** (Einführung in die Zahlentheorie. Neiss Fritz, S. VIII + 113, Hirzel Verlag, Leipzig, 1952, 4, 80 DM) [**Рецензия: Дрегер** (Draeger), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 5/6, 219 (нем.)]

Рецензент критикует книгу, как не дающую целостного изложения теории чисел и содержащую много опечаток.

1557 **РЕЦ. Теория чисел. Стюарт** (Theory of numbers. Stewart B. M., pp. XIII + 261, The Macmillan Co., New York, 1952, 5.50 doll) [**Рецензия: Рид** (Read Cecil B.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 4, 332—333 (англ.)]

См. также: 1518, 1519, 1528 **РЕЦ**, 1531 **РЕЦ**, 1532 ,1863, 1933, 1941 **РЕЦ**

АЛГЕБРА

1558 **К. Курс высшей математики. Смирнов В. И.**, т. III, ч. I, 338 стр., изд. 5-е, Гостехиздат, М., 1953, 9 р. 45 к.

Эта часть курса В. И. Смирнова посвящена некоторым вопросам линейной алгебры и основам теории групп, в первую очередь теории представлений групп. Книга состоит из трех глав.

Глава I — «Определители и решение систем уравнений» — содержит краткое изложение теории определителей, основные теоремы о системах линейных уравнений, включая их геометрическую интерпретацию и некоторые приложения к анализу (системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, неявные функции).

В главе II — «Линейные преобразования и квадратичные формы» — вводятся понятия линейного преобразования, тензора, квадратичной формы, устанавливаются основные свойства скалярного

произведения (неравенство Буняковского и т. д.), доказываются теоремы о приведении квадратичной формы к сумме квадратов, об одновременном приведении к сумме квадратов пары квадратичных форм, о приведении к диагональному виду унитарных и эрмитовых матриц. Изложение ведется, в основном, чисто алгебраическими методами; геометрическое понятие n-мерного пространства почти не используется. В конце гл. II приводятся определения гильбертова пространства (в виде l_2) и пространства непрерывных функций с квадратичной метрикой и кратко вводятся понятия линейных преобразований в этих пространствах.

Глава III — «Основы теории групп и линейные представления групп» — наиболее значительная по объему, содержит материал, не входящий в обязательную университетскую программу, но тесно связанный с различными вопросами университетского курса теоретической физики, в первую очередь с квантовой механикой и теорией относительности. Здесь вводится понятие группы сначала как группы преобразований, а затем в абстрактной форме и приводятся многочисленные примеры групп. Далее излагаются понятия изоморфизма, гомоморфизма, нормального делителя, фактор-группы. Большая часть главы посвящена представлениям групп линейными преобразованиями, причем основное внимание уделяется группе вращений и группе Лоренца. Рассматриваются также представления конечных и абелевых групп. В последних разделах этой главы рассматриваются некоторые вопросы общей теории непрерывных групп (структурные константы, инвариантное интегрирование и т. д.).

Настоящее издание отличается от предыдущего издания 1949 г. только наличием предметного указателя. *С. В. Фомин*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1559. К вопросу об отыскании общих корней двух алгебраических уравнений. Васильева Н. К., Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, 8, № 1, 18—21

Известный метод Лагранжа для нахождения одного общего корня двух алгебраических уравнений распространяется на случай, когда эти уравнения имеют два общих корня. *Л. Я. Окунев*

1560. Применение многочленов Чебышева к составлению матриц, у которых характеристический многочлен неприводим над полем рациональных чисел. Пародди (Application des polynomes de Tchebicheff à la formation de matrices dont le polynome caractéristique est irréductible sur le corps des nombres rationnels. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 6, 567—569 (франц.)

В работе показывается, что если для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

выполняется условие

$$|a_1|>1+\sum_{j=2}^{n}|a_j|\frac{C_{n-j+1}}{C_n},$$

где C_k $(k=1, 2, \dots, n)$ — убывающая система положительных чисел, то характеристический многочлен матрицы $T_n(A)$ неприводим над полем рациональных чисел ($T_n(x)$ — многочлен Чебышева). *Л. Я. Окунев*

1561. Об одном свойстве знакосимметрических матриц. Котелянский Д. М., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 4 (56), 163—167

Минор $B\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix}$ матрицы $B=\| b_{ij} \|_1^n$ называется минором с дисперсией 1, если он получается из главного минора вычеркиванием одной строки и одного столбца с разными индексами. Матрицу $B=\| b_{ij} \|_1^n$ назовем слабо знакосимметрической (с. з.), если произведение любых двух симметричных относительно главной диагонали миноров с дисперсией 1 неотрицательно.

В работе устанавливаются 2 теоремы, обобщающие известные свойства симметрических матриц.

Теорема I. Если в с. з. матрице $B=\| b_{ij} \|_1^n$ ранга r все главные миноры порядка $\leqslant r$ отличны от нуля, то число знакоперемен в последовательности

$$D_0=1,\ D_1=b_{i_1 i_1},\ D_2=B\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ i_1 i_2 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, D_r=B\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ i_1 \dots i_r \end{pmatrix}$$

не зависит от выбора этой последовательности.

Теорема II. Если в с. з. матрице $B=\| b_{ij} \|_1^n$

$$b_{11}>0,\ B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}>0, \dots, B\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ 1 & 2 \dots n \end{pmatrix}>0,$$

то все главные миноры матрицы B положительны. *Ф. Р. Гантмахер*

1562 РЕЦ. Линейная алгебра и теория матриц. Столл (Linear algebra and matrix theory. Stoll R. R., pp. 16 + 272, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1952, 6.00 doll.) [**Рецензии: Зелинский** (Zelinsky Daniel), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 6, 432 (англ.); **Хофрейтер** (Hofreiter N.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 2, 173 (нем.)]

ГРУППЫ

1563. О некоторых последовательностях элементов в свободных группах и их расширениях. Лазар (Sur certaines suites d'éléments dans les groupes libres et leurs extensions. Lazard Michel), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 1, 36—43 (франц.)

Свободная группа G с образующими ε_k $(1\leqslant k\leqslant r)$ и свободная алгебра Ли L с теми же образующими снабжаются топологиями: в G в качестве окрестностей нуля берутся члены нижнего центрального ряда $G=G_1\supset G_2\supset\dots$, а в L берется обычная топология формальных бесконечных рядов. Последовательность элементов $g(t)$ из пополнения $\bar{G}$ группы G, получающаяся изменением параметра t,

принимающего целочисленные неотрицательные значения, называется типичной, если $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, где a_k — элементы пополнения $\overline{L}$ алгебры L и степень $\omega(a_k)$ элемента a_k не меньше k. Пусть для каждого целого $i \geqslant 1$ x_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant d_i)$ суть элементы G_i, канонические образы которых в G_i/G_{i+1} составляют базу этой абелевой группы.

В заметке формулируются следующие теоремы:

1. Последовательность $g(t) = \prod_{i,j} x_{ij}^{H_{ij}(t)}$ тогда и только тогда типична, когда каждый показатель $H_{ij}(t)$ $(1 \leqslant i < \infty, 1 \leqslant j \leqslant d_i)$ есть многочлен степени $\leqslant i$, принимающий целые значения для целых t.

2. Равенство $g(t) = g_0 g_1^t \ldots g_k^{N_k(t)} \ldots$, где $N_k(t) = t(t-1)\ldots(t-k+1)/k!$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством типичных последовательностей в $\overline{G}$ и множеством последовательностей $g_0, g_1, \ldots, g_k, \ldots$ элементов $\overline{G}$ таких, что $\omega(g_k) \geqslant k$.

3. Равенство $g(t) = g_0 g_1^t \ldots$ определяет взаимно однозначное соответствие между совокупностью типичных последовательностей в M и совокупностью последовательностей элементов $g_0, g_1, \ldots$ из M, для которых $\omega(g_k) \geqslant k$.

Если $g(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ — типичная последовательность в M, то соответствующая последовательность g_k получается по формулам $g_1 = a_1$, $g_2 = a_2$, $g_3 = a_3 - [a_1, a_2]/2$ и т. д. В последней теореме M обозначает совокупность элементов вида $\sum \lambda_{ij} x_{ij}$, где λ_{ij} — рациональная несократимая дробь, знаменатель которой не делится на простые числа, бо́льшие i.

Теоремы 1, 2 для случая двух образующих дают тождество Холла в канонической форме, а теорема 3 дает обращение формулы Кемпбела — Хаусдорфа. Автор указывает, что эти результаты позволяют дать чисто алгебраическое доказательство результатов А. И. Мальцева о нильпотентных группах и их обобщениях (Изв. АН СССР, сер. мат., 1949, **13**, 201—212; Докл. АН СССР, 1948, **62**, 745—748). *А. И. Мальцев*

1564. Об условии минимальности для нормальных делителей локально разрешимых групп. **Чарин В. С.**, Мат. сб., 1953, **33** (75), № 1, 27—36

В статье А. Г. Куроша и С. Н. Черникова (Усп. мат. наук, 1947, **2**, № 3 (19), 18—59) сформулирована следующая проблема: будет ли всякая разрешимая группа с условием минимальности для нормальных делителей удовлетворять условию минимальности для подгрупп?

Ранее автор опубликовал (Докл. АН СССР, 1949, **66**, № 4, 575—576) пример разрешимой группы, удовлетворяющей первому условию, но не удовлетворяющей второму. В связи с этим возникает вопрос об условиях, при которых в разрешимой или, более обще, в локально разрешимой группе из условия минимальности для нормальных делителей следует выполнимость условия минимальности для подгрупп.

Опираясь на результаты своей работы (Мат. сб., 1951, **29** (**71**), №2, 433—454), а также на исследования референта о полных группах с возрастающим центральным рядом и разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп, автор дает следующее решение поставленного вопроса.

Пусть $\mathfrak{G}$ — локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для нормальных делителей. Для того, чтобы группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяла условию минимальности для подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы все факторы какого-либо ее главного ряда (существование которого следует из условия минимальности для нормальных делителей) имели конечный ранг.

Отсюда вытекает, в частности, что локально разрешимые группы конечного ранга, удовлетворяющие условию минимальности для нормальных делителей, удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. Группой конечного ранга (в соответствии с определением конечного специального ранга в смысле А. И. Мальцева) называется такая группа, в которой любое конечное множество элементов порождает подгруппу с числом образующих, не превосходящим некоторого фиксированного числа. *С. Н. Черников*

1565. Обобщение центральных элементов группы. **Шенкман** (A generalization of the central elements of a group. Schenkman Eugene), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 501—504 (англ.)

Пусть a и g элементы группы G; элемент $g^{-1}ag$ обозначается через $a(g) = a^{(1)}(g)$. По индукции определяется $a^{(n)}(g) = a(a^{(n-1)}(g))$. Элемент a называется слабо центральным (порядка n), если $a^{(n)}(g) = a$ для всякого $g \in G$. Последнее соотношение эквивалентно условию $[\overbrace{a \ldots [a}^{n \text{ раз}}, g] \ldots] = 1$ для всякого $g \in G$, где, как обычно, $[a, g] = a^{-1} g^{-1} ag$. Доказываются следующие результаты:

Теорема 1. Если в локально конечной группе G все элементы, порядки которых являются степенями заданного простого числа p, слабо центральны, то они составляют нормальный делитель в G.

Следствие 1. Если все элементы локально конечной группы слабо центральны, то группа есть прямое произведение p-групп.

Теорема 2. Если G локально конечная разрешимая группа, то множество ее слабо центральных элементов есть нормальный делитель, разложимый в прямое произведение p-групп.

Теорема 3. Элемент конечной разрешимой группы G будет тогда и только тогда слабо центральным, когда он содержится в наибольшей инвариантной нильпотентной подгруппе (нильрадикале) группы G.

Результат следствия 1 для конечных групп известен (см. Zorn. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 485—487; Конторович П. Г., Мат. сб., 1951, **28** (**70**), № 1, 79—88). *П. Г. Конторович*

1566. Две теоремы о группах Энгеля. **Грюнберг** (Two theorems on Engel groups. Gruenberg K. W.), Proc. Gambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 377—380 (англ.)

Группа G удовлетворяет условию Энгеля, или является группой Энгеля, если для любой пары ее элементов x, y выполняется равенство

$$[\ldots[[x,y],y],\ldots,y] = 1,$$

где k

где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, а индекс k, вообще говоря, зависит от x и y; если k остается фиксированным для любых x и y, то говорят, что группа удовлетворяет k-ому условию Энгеля. Известно, что конечная группа Энгеля является нильпотентной.

В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Разрешимая группа Энгеля с конечным числом образующих будет нильпотентной.

Теорема 2. Все члены нижнего центрального ряда группы Энгеля с конечным числом образующих сами обладают конечным числом образующих.

Доказательства существенно используют понятие базисной последовательности для конечного комплекса X группы (определение см. Hall M., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 575—581). Автор использует также одну теорему из неопубликованной работы Холла (Hall P): если G обладает конечным числом образующих и b_1, b_2, b_3,...— базисная последовательность для какой-либо конечной системы ее образующих, то G тогда и только тогда нильпотентна, когда все члены последовательности, кроме конечного числа их, равны единице (доказательство теоремы не приводится).

Показывается, что метод доказательств применим также к выводу аналогичных результатов для колец Ли.

Теорема 1′. Разрешимое кольцо Ли с конечным числом образующих, удовлетворяющее условию Энгеля вида $[\ldots[[x,y],y],\ldots,y]=0$, нильпотентно.

Теорема 2′. Все члены нижнего центрального ряда кольца Ли с конечным числом образующих и с условием Энгеля сами обладают конечным числом образующих (см. реф. 1565).

П. Г. Конторович

1567. Об одной абелевой группе с операторами. Боревич З. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 2, 193—195

Пусть $G = F/R$ — представление группы G в виде фактор-группы свободной группы F. Каждому $\sigma \in G$ сопоставляется элемент $u_\sigma \in F$ из класса смежности, определяемого σ, причем $u_1 = 1$. В абелевой группе $R_0 = R/[R, R]$ естественным образом определяются операторы из G: если $\bar{x} = x[R, R]$, $x \in R$, то $\sigma\bar{x} = \overline{u_\sigma x u_\sigma^{-1}}$, $\sigma \in G$.

Через E обозначается свободная абелева группа, порожденная элементами e_σ, $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, как свободными образующими. Рассматривается группа $W = E + R_0$, в которой вводятся операторы из G, действующие по формуле $\sigma e_\tau = e_{\sigma\tau} - e_\sigma + f(\sigma, \tau)$, где $f(\sigma, \tau) = \overline{u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1}} \in R_0$.

Доказывается следующее утверждение: W есть свободный G-модуль, т. е. W изоморфна прямой сумме групп, каждая из которых операторно изоморфна целочисленному групповому кольцу группы G.

Из этой теоремы легко получаются, посредством применения простейших редукционных теорем теории гомологий в группах, теорема Эйленберга и Маклейна: $H^{(n)}(G, \mathrm{Hom}(R_0, \mathfrak{A})) \approx H^{(n+2)}(G, \mathfrak{A})$ при $n > 0$ и аналогичная теорема для $n = 0$ (Eilenberg S., MacLane S., Ann. Math., 1947, 48, № 1, 51—78), а также теорема Боревича: $H^{n+2}(G, R_0 * b) \approx H^n(G, b)$ (Боревич З. И., Изв. АН СССР, сер. мат., 1952, 16, № 4, 365—384).

Устанавливаются без привлечения теории характеров двойственные редукционные теоремы для нижних гомологий. *Д. К. Фаддеев*

1568. Замечание о предположении счетности в алгебре. Лоренцен (Eine Bemerkung über die Abzählbarkeitsvoraussetzung in der Algebra. Lorenzen Paul), Math. Z., 1953, 57, № 2, 241—243 (нем.)

Средствами конструктивной математики (Lorenzen P., Math. Z., 1950, 53, 162—202; 1951, 54, 1—24) автор строит примарную группу G_p, всякий элемент которой имеет конечную высоту; построенная группа G_p является сверхсчетной (hyperabzählbar), но ее фактор-группа G_p/pG_p счетна. Автор утверждает (без доказательства), что существует сверхпоследовательность (die Hyperfolge) $Z = Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)}, \ldots$ циклических подгрупп $Z^{(k)}$ группы G_p такая, что группа G_p является прямой суммой групп $Z^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Это утверждение является ошибочным: группа G_p принадлежит к классу p-замкнутых групп, изученных в работе референта (Мат. сб., 1943, 16 (58), № 2, 129—162); из теоремы 12 этой работы референта (см. стр. 149) следует, что p-замкнутая группа G_p разложима в прямую сумму только конечного числа слагаемых, поскольку одна из базисных подгрупп группы G_p является прямой суммой подгрупп, порожденных элементами $x_{0,l}$ порядков p^l ($l = 1, 2, \ldots$). Следует также отметить, что группа G_p изоморфна группе, построенной раньше А. Г. Курошем (Мат. сб., 1939, 5 (47), № 2, 347—354). *Л. Я. Куликов*

1569. О вложении и числе подгрупп у П-отделимых групп. Чунихин С. А., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 3, 461—462

Пусть П — некоторое множество простых чисел.

Конечная группа $\mathfrak{G}$ называется П-отделимой, если в каждый индекс ее композиционного ряда не могут входить степени двух различных простых чисел из П. Если каждый индекс композиционного ряда либо не делится ни на одно простое число из П, либо же является некоторым простым числом, входящим в П, то группа $\mathfrak{G}$ называется П-разрешимой.

Пусть $m > 1$ такой делитель порядка g группы $\mathfrak{G}$, что $\left(m, \frac{g}{m}\right) = 1$ и все простые делители m входят в П. Пусть, далее, m_1 делитель числа m. Автор приводит без доказательства несколько результатов относительно вложения каждой подгруппы порядка m_1 П-отделимой группы $\mathfrak{G}$ в некоторую подгруппу

порядка m той же группы. Вложение возможно в каждом из следующих случаев:

1) $\left(m_1, \frac{m}{m_1}\right) = 1$

(непосредственно следует из основного результата автора; см. Докл. АН СССР, 1948, **59**, № 3, 443—445);

2) Каждое простое число p, входящее в m_1, удовлетворяет по крайней мере одному из трех условий: а) группа $\mathfrak{G}$ p-разрешима; б) если $m = sp^\alpha$, $(s, p) = 1$, то m_1 делится на p^α; в) если $m = sp^\alpha$, $(s, p) = 1$, то p^α входит в некоторый индекс композиционного ряда группы $\mathfrak{G}$.

В частности, если условие в) выполняется для всех простых делителей p числа m, то теорема о вложении подгрупп верна для любого делителя m_1 числа m.

В заключение автор указывает, что если q — простой делитель числа ρ подгрупп порядка m в П-отделимой группе $\mathfrak{G}$ и q удовлетворяет условию а) или в), то q^β, где $\rho = \rho_1 q^\beta$ и $(\rho_1, q) = 1$, является делителем некоторого индекса главного ряда $\mathfrak{G}$ и сравнимо с единицей по некоторому простому делителю числа m.

Референтом обнаружено, что в формулировке теоремы 2 пропущено условие П-отделимости группы $\mathfrak{G}$. *П. А. Гольберг*

1570. О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы. Чунихин С. А., Мат. сб., 1953, **33** (75), № 1, 111—132

В первой части работы автор дает несколько ослаблений условий в ранее полученных им теоремах типа Силова, для чего вводит некоторые определения.

Ряд подгрупп

$$G_0 = G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_l = E$$

конечной группы G называется П-перестановочным, если для всякого простого числа p из множества П подгруппа G_i перестановочна с любой силовской p-подгруппой группы G_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Пусть G_1 — некоторая подгруппа порядка g_1 конечной группы G порядка g и b — наибольший делитель числа g/g_1, все простые делители которого входят в П. Пусть, далее, фактор-структура $G//G_1$ (т. е. совокупность всех подгрупп группы G, содержащих G_1) содержит подгруппу B порядка bg_1 и все подгруппы из $G//G_1$ порядка bg_1 сопряжены с B. $G//G_1$ называется фактор-структурой типа П $*$ 1, если у B имеется такой П-перестановочный ряд, проходящий через G_1, что на участке от B до G_1 все его индексы являются простыми числами из П. $G//G_1$ называется фактор-структурой типа П 1, если, кроме того, указанный ряд является нормальным.

Если $G//E$ имеет тип П $*$ 1 или П 1, то и G называется, соответственно, группой типа П $*$ 1 или П 1.

Доказывается, что группы типов П $*$ 1 и П 1 совпадают и что конечная группа G будет типа П 1 тогда и только тогда, когда у G существует П-перестановочный ряд, все фактор-структуры которого будут типа П $*$ 1 (обобщение теоремы 3 автора см. в Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 6, 735—737). Автор дает обобщение теоремы Шура — Цассенхауза (Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, **1**, Berlin-Leipzig, 1937, 126, предложение 27), а также своих теорем типа Шура—Цассенхауза (Докл. АН СССР, 1950, **73**, № 1, 29—32; Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 6, 973—975).

Во второй части даются достаточные признаки существования подгрупп в конечной группе. Из этих признаков, как частный случай, следует теорема Шура (Zassenhaus H., там же, 125, предложение 25), а также теорема о существовании подгрупп, порядки которых необязательно взаимно просты с их индексами.

В третьей части доказывается необходимый признак существования подгрупп: если всякому представлению порядка g группы G в виде $g = mn$, где $(m, n) = 1$ и простые делители числа m принадлежат П, соответствуют подгруппы порядков m и n, то G является П-отделимой группой (см. реф. 1569), причем класс групп, удовлетворяющих этому условию, строго уже класса П-отделимых групп.

В четвертой части рассматриваются максимальные подгруппы П-разрешимых групп (см. реф. 1569). В частности, обобщаются некоторые теоремы Ope относительно максимальных подгрупп разрешимых групп (Ore O., Duke math. J., 1939, **5**, 431—460, теоремы 11, 13 и 14 главы IV). *П. А. Гольберг*

1571. О неизоморфных голоморфах. Милс (On the non-isomorphism of certain holomorphs. Mills W. H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 428—443 (англ.)

Показывается, что голоморф абелевой группы нечетного порядка имеет только внутренние автоморфизмы. Голоморф абелевой группы, порядок которой равен степени простого числа, неразложим в прямое произведение собственных подгрупп. Основной результат: если голоморфы конечных групп G и G' изоморфны и G — абелева группа, то группы G и G' изоморфны. При доказательстве автор пользуется результатами, полученными им ранее (см. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **71**, 372—392).

А. П. Дицман

1572. Транзитивные системы гомоморфизмов. Скотт (Transitive sets of homomorphisms. Scott W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 175—177 (англ.)

Пусть G и H группы и $o(G)$ порядок группы G. Показывается эквивалентность нижеследующих высказываний (A_n) и (B_n): (A_n). Пусть $o(G) \geqslant n+1$; $o(H) \geqslant n+1$; если $a_i \in G$, $x_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i \neq a_j$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $a_i \neq e_G$ и $x_i \neq e_H$, где e_G и e_H единицы G и H, то существует такой гомоморфизм σ, группы G на H, что $a_i\sigma = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (B_n) Пусть $o(G) \geqslant n+1$, $o(H) \geqslant n+1$, если $b_i \in G$ и $y_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$; $b_i \neq b_j$ и $y_i \neq y_j$, при $i \neq j$, тогда существует $h \in H$ и гомоморфизм σ группы G на H такой, что $h(b_i\sigma) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Далее устанавливается:

1. Если верно (A_1) и G не является группой без кручения, то все элементы G и H (кроме e_G и e_H) имеют простой порядок p, а если H — конечная группа, то G — прямое произведение групп порядка p. Обратно, если $o(G) > 1$, $o(H) > 1$ и G прямое произведение групп простого порядка p,

а все элементы H имеют порядок p, то выполняется (A_1).

2. (A_2) выполняется тогда и только тогда, когда G и H являются прямыми произведениями групп порядка 2, или если порядок H равен трем, а G является прямым произведением групп третьего порядка. Кроме того, показывается, что (A_n) не выполняется для луп при $n > 3$.

Эти результаты являются обобщением теорем, изложенных в книге Цасенхауза (Zassenhaus H., The theory of groups, New York, 1949, 51—52). *А. П. Дицман*

1573. О записи элемента конечной группы в виде коммутатора. Мотода (有限群における交換子について・本田欣哉), 數學 (Сугаку), 1953, 4, № 4, 39—40 (япон.)

Доказывается, что элемент a конечной группы G является коммутатором (т. е. может быть записан в виде $xyx^{-1}y^{-1}$, где x и y — элементы из G) в том и только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^{h} \frac{\chi_i(a)}{\chi_i(e)} \neq 0$$

(e — единичный элемент группы G; характеры χ_i относятся к неприводимым представлениям G; h — число различных неприводимых представлений). Доказывается также, что если элемент a порядка m — коммутатор, то элемент a^d, где $(m, d) = 1$, — также коммутатор. *В. К. Туркин*

1574. О некоторых свойствах целочисленных групповых колец. Берман С. Д., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 1, 7—9

Через $R(G, C)$ обозначается групповое кольцо конечной группы G над кольцом C целых чисел. Доказывается, что порядок любого периодического элемента $R(G, C)$ является делителем порядка G. Определяются все G, для которых в $R(G, C)$ нет других периодических элементов, кроме элементов G, умноженных на ± 1. Это либо абелевы группы, либо гамильтоновы группы порядка 2^m.

Определяются также все группы, для которых групповая алгебра над полем рациональных чисел разлагается в прямую сумму алгебр с делением. Это либо абелевы группы, либо гамильтоновы группы порядка $t2^m$, где 2 принадлежит по модулю t нечетному показателю. *И. Р. Шафаревич*

1575. Метризация конечномерных групп. Ньюберг (Metrization of finite dimensional groups. Newburgh J. D.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 287–293 (англ.)

Высказывается предположение, что всякая конечномерная связная локально бикомпактная топологическая группа обладает счетной базой и метризуема. Доказывается, что это предположение справедливо, если группа, сверх того, бикомпактна или локально связна; при этом под размерностью понимается гомологическая размерность. Далее доказывается, что одномерная связная локально бикомпактная группа либо бикомпактна, либо изоморфна топологической группе действительных чисел. *В. А. Рохлин*

1576. О некоторых подгруппах компактных групп Ли. Борель, Серр (Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts. Borel A., Serre J.-P.), Comment. math. helv., 1953, **27**, № 2, 128—139 (франц.)

Рассматриваются топологические группы, обладающие инвариантным рядом, факторы которого суть либо конечные циклические группы, либо окружности [свойство (MP)]. Этим свойством обладают, в частности, все нильпотентные компактные группы Ли.

Доказывается, что подгруппа компактной группы Ли G, обладающая свойством (MP), содержится в нормализаторе некоторого максимального тора группы G. Пользуясь этим результатом, авторы показывают, что всякое линейное представление f группы H со свойством (MP) моноциально, т. е. в пространстве, где действует представление f, существует такой базис $e_1, \ldots, e_N$, что если $h \in H$, то вектор $f(h)\, e_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ коллинеарен некоторому e_j. Авторы называют p-рангом компактной группы Ли G максимальное целое число k такое, что G содержит подгруппу, изоморфную прямому произведению k циклических групп простого порядка p. Вычисляются p-ранги групп $U(k)$, $SO(k)$, а также 2-ранги групп G_2 и F_4.

Доказывается, что если p-ранг компактной группы Ли превосходит ее ранг, то группа имеет p-кручение. Отсюда следует, что группы $SO(k)$, G_2, F_4 и E_8 имеют 2-кручение. *А. Л. Онищик*

1577. Параметризация унитарной симплектической группы и вычисление элемента объема. Мурнаган (The parametrisation and element of volume of the unitary symplectic group. Murnaghan F. D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 4, 324—327 (англ.)

Вводятся параметры в симплектическую унитарную группу. Число параметров этой группы равно $k(2k+1)$; k из них определяют класс, так как каждая симплектическая унитарная матрица подобна матрице вида

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\alpha_k} \end{pmatrix}$$

Дается способ введения параметров внутри класса. Указываются формулы для объема в найденных параметрах. Работа содержит большое количество численных примеров. *И. И. Пятецкий-Шапиро*

1578. Спинорные вращения и отражения. I, II. Груневолд (Spinor rotations and reflections. I, II. Groenewold H. J.), Koninkl. nederl. akad. wetensch. Proc., 1953, **B 56**, № 2, 169—178, 179—192 (англ.)

Рассматриваются представления группы вращений и отражений двух псевдоевклидовых пространств — шестимерного пространства с координатами x^0, x^1, x^2, x^3, x^5, x^6 и метрическим тензором $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{55} = g_{66} = 1$; $g_{ab} = 0$ $(a \neq b)$, и вложенного в него четырехмерного пространства специальной теории относительности (координаты x^0, x^1, x^2, x^3; метрический тензор $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; $g_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$). В обоих случаях фактор-группа общей группы L_6 (соответственно L_4) вращений и отражений про-

странства по нормальному делителю $L_{6c}(L_{4c})$, состоящему из тех вращений, которые можно соединить непрерывной кривой с единицей группы, содержит четыре элемента.

Представления группы L_{4c} (или L_{6c}) можно задать, указав образы инфинитезимальных вращений. Добавив к общим условиям, которым должны удовлетворять эти образы при любом представлении, еще одно дополнительное условие, автор специально выделяет два (двузначных) двумерных представления группы L_{4c}, в которых инфинитезимальные вращения представляются посредством известных из квантовой механики матриц Паули, и одно (двузначное) четырехмерное представление группы L_{6c}, в котором инфинитезимальные вращения представляются посредством матриц Дирака.

Для полной группы L_4 получаются двумерное и четырехмерное представления; последнее из них есть известное представление в пространстве биспиноров, используемое в квантовой механике при выводе уравнения Дирака. Аналогично четырехмерное представление группы L_{6c} позволяет получить четырехмерное и восьмимерное представления общей группы L_6. Указывается, что между четырехмерным (биспинорным) представлением группы L_4 и четырехмерным представлением группы L_6 можно установить соответствие, при котором: 1) образам собственных вращений четырехмерного пространства S_4 отвечают образы тех же вращений четырехмерного подпространства S_4' пространства S_6, натянутого на оси x^0, x^1, x^2 и x^3; 2) образам времениподобных или пространственно-подобных отражений в S_4 отвечают образы вращений S_6, получаемых при выполнении того же отражения в подпространстве S_4' и последующего отражения относительно гиперплоскости с нормалью, направленной вдоль оси x^5 или, соответственно, x^6. Это соответствие позволяет использовать четырехмерное представление группы S_6 при решении задач, связанных с биспинорным представлением группы Лоренца.

Во второй части статьи описывается поведение при отражениях ряда элементарных тензоров специального вида. Полученные при этом результаты сведены в таблицу. Специально рассматривается преобразование тензоров, приводящее в случае решения уравнений Дирака к «зарядно-сопряженному» решению. Указывается связь полученных результатов с результатами ряда предшествующих физических исследований. *А. М. Яглом*

1579. О частично упорядоченных группах без собственных выпуклых подгрупп. Митиура (On partially ordered groups without proper convex subgroups. Michiura Tadashi), Konink. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 231—232; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 231—232 (англ.)

Известно, что всякая архимедово упорядоченная группа изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. В работе дается следующее обобщение этого результата:

Пусть нетривиально частично упорядоченная группа G без собственных выпуклых подгрупп удовлетворяет условию: из $nx \geqslant 0$ следует $x \geqslant 0$; тогда группа G изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. *А. Ф. Голубчиков*

1580 Д. Обобщение федоровских групп. Заморзаев А. М. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

Федоровскими группами называются бесконечные дискретные группы преобразований симметрии в евклидовом пространстве, изученные русским ученым Е. С. Федоровым в связи с исследованиями по кристаллографии.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

1581. Об одном обобщении понятия нормального расширения. Крулль (Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs. Krull Wolfgang), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1/2, 54—63 (нем.)

Используется введенное Барбильяном (Acad. R. P. Române, Studii Cerc. mat., 1950, **2**,189—253) обобщение понятия нормального расширения. Расширение L/K (не обязательно алгебраическое) называется нормальным, если для любого подполя M ($L \supset M \supset K$) совокупность всех алгебраических над M элементов L нормальна над M в употреблявшемся раньше смысле этого слова.

Пусть G — группа всех автоморфизмов L/K, а $U(M)$ — подгруппа тех из них, которые не меняют элементов подполя M. Доказывается, что если K имеет характеристику 0, то L/K нормально тогда и только тогда, когда каждое промежуточное поле M однозначно определяется своей подгруппой $U(M)$; дается обобщение этого факта на поля характеристики p.

Если L/K нормально и $U(M)$ инвариантно в G, то M тоже нормально, но обратное неверно. Например, если и L и K алгебраически замкнуты, то ни для какого M $U(M)$ не инвариантно в G.

Автор отмечает, что неизвестно ни одного примера неалгебраических нормальных расширений, не являющихся алгебраически замкнутыми, и высказывает некоторые гипотезы относительно построения теории Галуа нормальных расширений. *И. Р. Шафаревич*

1582. К теории родов абелевых числовых полей. Леопольдт (Zur Geschlechtertheorie in abelschen Zahlkörpern. Leopoldt Heinrich W.), Math. Nachr., 1953, **9**, № 6, 351—352 (нем.)

Работа содержит вывод теории родов для абелевых расширений поля рациональных чисел, аналогичный изложенному Хассе (J. Math. Soc. Japan., 1951, **3**, 45—51) для квадратичных полей. Родовое поле K^* абелева расширения K поля рациональных чисел P определяется как максимальное расширение, абелево над P и неразветвленное над K.

Пусть X — группа характеров, обращающихся в 1 на группе прогрессий, соответствующей K. Если χ — характер из X, $f(\chi)$ — его ведущий модуль и p пробегает простые делители $f(\chi)$, то $\chi = \Pi\chi_p$, где χ_p имеет ведущий модуль, равный степени p. Когда χ пробегает X, χ_p пробегает группу X_p. Доказывается, что произведение всех X_p состоит из тех и только тех характеров, которые обращаются в 1 на группе прогрессий, соответствующей K^*.

Группа классов дивизоров, соответствующая K^* в K, называется главным родом, а классы смеж-

ности по ней — родами. Доказывается, что число родов равно $(K:P)^{-1}\Pi e_p$, где e_p — порядок ветвления критического простого числа p в K/P. Если расширение K/P циклическое с образующим автоморфизмом S, то главный род состоит из $(1-S)$-ых степеней абсолютных классов.

При помощи теории родов доказывается, что если число классов K взаимно просто с его дискриминантом, то K есть композит полей с ведущими модулями, являющимися степенями простых чисел. Для циклического расширения K/P простого порядка дается обращение этой теоремы.

И. Р. Шафаревич

1583. Основы теории инвариантной характеризации нормальных полей с заданной группой Галуа. Вольф (Grundlagen der Theorie der invarianten Kennzeichnung galoisscher Körper mit vorgegebener Galoisgruppe. Wolf Paul), Math. Nachr., 1953, **9**, № 4, 201—216 (нем.)

Даются некоторые инварианты обобщенных алгебр Галуа с заданной группой Галуа $\mathfrak{G}$. «Обобщенной алгеброй Галуа» называется алгебра K над полем Ω, имеющая изоморфную $\mathfrak{G}$ группу автоморфизмов и нормальный базис над Ω, т. е. базис вида $\{\ldots u^S\ldots\}$, $S\in\mathfrak{G}$.

Характеризация посредством инвариантов для «алгебр Галуа», т. е. для коммутативных полупростых алгебр с нормальным базисом, была дана ранее Хассе (Hasse H., J. reine und angew. Math., 1950, **187**, 14—43) на основе теории представлений групп.

В реферируемой работе в качестве инварианта обобщенной алгебры Галуа K вводится так называемый нормальный фактор C. Он представляет собой элемент группового кольца $G\times G$ (над Ω) прямого произведения $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$. Нормальный фактор C рассматривается с точностью до преобразования $C\to A^{-H_2}C$ $(A\times A)$, где A — регулярный элемент из группового кольца G группы $\mathfrak{G}$, H_2 обозначает изоморфное вложение $S\to S^{H_2}=S\times S$ алгебры G в $G\times G$.

Для данной алгебры K нормальный фактор C строится следующим образом. Рассматривается

$$W=\sum_{T\in\mathfrak{G}} T^{-1}\Theta^T\in G\times K.$$

Устанавливается, что

$$W\times W=\sum_{T,\,R}(T^{-1}\times R^{-1})\,\Theta^T\Theta^R$$

и

$$W^{H_2}=\sum_T (T^{-1}\times T^{-1})\,\Theta^T$$

отличаются правым множителем из $G\times G$. Этот множитель и обозначается через C. Построение K по данному C осуществляется обращением этой конструкции. Инвариант C должен при этом удовлетворять соотношению

$$C^{H_{12,3}}C^{H_{1,2}}=C^{H_{1,23}}C^{H_{2,3}},$$

обеспечивающему ассоциативность алгебры K. Здесь $H_{12,3}$, $H_{1,2}$, $H_{1,23}$ и $H_{2,3}$ — изоморфные вложения $G\times G$ в $G\times G\times G$, определенные формулами:

$$(T\times R)^{H_{12,3}}=T\times T\times R,$$

$$(T\times R)^{H_{1,2}}=T\times R\times 1,$$

$$(T\times R)^{H_{1,23}}=T\times R\times R,$$

$$(T\times R)^{H_{2,3}}=1\times T\times R.$$

Нормальный фактор C тесно связан с таблицей умножения алгебры K в нормальном базисе. Именно, если $C=\sum_{T,\,R} c_{T,\,R}(T\times R)$, $c_{T,\,R}\in\Omega$, то

$$\Theta^T\Theta^R=\sum_S c_{ST^{-1},\,SR^{-1}}\Theta^S.$$

Автор приводит условия, которым должен удовлетворять нормальный фактор C, для коммутативности, полупростоты и неприводимости K. Устанавливается простая связь между нормальным фактором и системой множителей, введенной в упомянутой выше работе Хассе для инвариантной характеризации алгебр Галуа.

Д. К. Фаддеев

1584. Заметка о $\mathcal{E}$-числах Милнера. Килмистер (A note on Milner's $\mathcal{E}$-numbers. Kilmister C. W.), Proc. Roy. Soc., 1953, **A 218**, № 1132, 144—148 (англ.)

Используя общие свойства ассоциативной алгебры и представление E-чисел линейными операторами в алгебре кватернионов, автор дает более простые доказательства основных результатов работы Милнера о $\mathcal{E}$-числах (Milner S. R., Proc. Roy. Soc., 1952, **A214**, № 1118, 98—129).

Полученные результаты остаются справедливыми и для произвольных алгебр Клиффорда.

Е. Г. Шульгейфер

1585. О линейных представлениях разрешимых алгебр Ли. Косул (Sur les représentations linéaires des algèbres de Lie résolubles. Koszul Jean-Louis), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 25, 2371—2372 (франц.)

Пусть g — алгебра Ли над полем k, для которой задано представление в конечномерном линейном пространстве M над k. Шевалле и Эйленберг ввели понятие группы гомологий (верхних) $H(g, M)$ алгебры g в M (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 85—124).

Если для g имеется представление в пространстве $N\supset M$, продолжающее первое представление, то существует естественный гомоморфизм $\varphi: H(g,M)\to H(g, N)$. Класс гомологий $c\in H(g, M)$ называется исчезающим, если найдется такое N, что $\varphi c=0$. Если g — полупростая алгебра над полем характеристики 0, то исчезающим классом гомологий (при любом M) является только $c=0$.

Основной результат: чтобы всякий класс гомологий алгебры g над полем характеристики 0 (при любом M) был исчезающим, необходимо и достаточно, чтобы алгебра g была разрешимой. Для произвольной алгебры g исчезающие классы составляют ядро гомоморфизма $H(g, M)\to H(g, M')$, где M' — некоторое пространство представления g, зависящее от g и M.

Д. К. Фаддеев

1586. Линейно компактные модули и кольца. Зелинский (Linearly compact modules and rings. Zelinsky Daniel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 1, 79—90 (англ.)

Топологический R-модуль M (топологический модуль M над топологическим кольцом R) называется линейно компактным, если каждая центрированная система смежных классов имеет непустое пересечение. Ряд утверждений о линейно компактных векторных пространствах переносится на R-модули. Эти результаты используются при исследовании топологического кольца R, рассматриваемого как левый R-модуль.

Полные локальные кольца и максимальные нормированные кольца, т. е. кольца, поле отношений которых максимально (см. Kaplansky I., Duke Math. J., 1942, **9**, 303—321), являются линейно компактными.

Пусть R — линейно компактное кольцо, обладающее полной системой окрестностей нуля, состоящей из двусторонних идеалов. Если R полупростое, то R изоморфно полной прямой сумме дискретных простых колец с условием минимальности; если кольцо R коммутативно, то оно раскладывается в полную прямую сумму радикального кольца и примарных колец с единицей, причем все слагаемые линейно компактны. *В. М. Курочкин*

1587. Идеалы в одном классе коммутативных банаховых алгебр. Уэрмэр (Ideals in a class of commutative Banach algebras. Wermer John), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 273—278 (англ.)

Рассматриваются коммутативные полупростые регулярные нормированные алгебры без единицы с плотным множеством элементов, у которых соответствующие функции $x(M)$ равны нулю вне компакта. Совместно с алгеброй R рассматривается семейство S линейных изометричных мультипликативных операторов U ($Ux\cdot y = Uy\cdot x$); предполагается, что каждое подпространство алгебры R, инвариантное относительно всех $U\in S$, является идеалом алгебры. Всем перечисленным условиям удовлетворяют, например, групповые алгебры локально компактных коммутативных групп (S — семейство операторов сдвига), а также и некоторые другие алгебры, примеры которых приводятся в конце работы.

Результаты: 1) всякий примарный идеал максимален; 2) если выполнено условие Диткина (Шилов Г. Е., Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, **21**, 52), то справедлива его теорема (там же, 53). Вместо условия Диткина можно требовать наличия системы образующих $\{e\}$, удовлетворяющих условию: $\|ex\| = \|x\|$ для всех $x\in R$. *Г. Е. Шилов*

1588. Теоремы о строении структур с относительными дополнениями. Мак-Лафлин (Structured theorems for relatively complemented lattices. McLaughlin J. E.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 197—208 (англ.)

В предыдущей работе (Duke Math. J., 1951, **18**, № 1, 73—84) автор показал, что в простой структуре с относительными дополнениями и конечной размерности $n > 1$ для всяких двух точек p и q проективность факторов $p/0$ и $q/0$ может быть установлена посредством не более чем $2\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]$ транспозиций. Там же был приведен пример структуры такого типа с «максимальной проективностью», т. е. структуры, в которой для некоторых точек p и q установление проективности факторов $p/0$ и $q/0$ требует в точности $2\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]$ транспозиций.

В реферируемой работе, являющейся продолжением упомянутой работы автора, сначала приводятся некоторые теоремы о структурах с относительными дополнениями и конечной размерности. Показывается, что такие структуры L определяются подмножеством, состоящим из 0, 1, точек и максимальных в $L - \{1\}$ элементов. Получаемые результаты применяются затем к изучению простых структур с относительными дополнениями нечетной размерности с максимальной проективностью.

Г. Я. Арешкин

1589. Нормальное пополнение подмножества полной структуры и структур непрерывных функций. Хорн (The normal completion of a subset of a complete lattice and lattices of continuous functions. Horn Alfred), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 137—152 (англ.)

Пусть C является произвольным подмножеством полной структуры B, $\widetilde{C}$ — нормальное пополнение C. Изучается подмножество структуры B, содержащее C и изоморфное $\widetilde{C}$. Сначала показывается, что если на структуре B определены операция замыкания $x \longrightarrow x^*$ и двойственная ей операция $x \longrightarrow x_*$ с условиями: а) $x_* \leqslant x \leqslant x^*$, б) $(x_*)_* = x_*$, $(x^*)^* = x^*$ и в) $x \leqslant y \longrightarrow x_* \leqslant y_*$, $x^* \leqslant y^*$, то множества $L = \underset{x}{E}[x = x_*]$, $U = \underset{x}{E}[x = x^*]$, $NL = \underset{x}{E}[x = (x^*)_*]$ и $NU = \underset{x}{E}[x = (x_*)^*]$ являются полными структурами, причем структуры NL и NU изоморфны.

Доказывается, что если определить x^* ($x \in B$) как наибольшую в B нижнюю грань множества $\underset{y}{E}[y \in C,\ y \geqslant x]$, а x_* — определить двойственным образом, то структуры NL и NU изоморфны $\widetilde{C}$. Этот результат применяется к структуре B всех действительных функций $(-\infty \leqslant f(x) \leqslant \infty)$ на топологическом пространстве X и к ее подмножеству C всех непрерывных функций.

Изучаются нормальные пополнения множества всех конечных и всех ограниченных непрерывных функций (см. Dilworth R. P., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, 427—438). На основании операций

$$f_-(x) = \sup_{A\in N(x)} \inf_{y\in A} f(y), \quad f^-(x) = \inf_{A\in N(x)} \sup_{y\in A} f(y),$$

где $N(x)$ — система окрестностей точки x, помимо обычных классов полунепрерывных снизу и сверху функций $LS = \underset{f}{E}[f = f_-]$ и $US = \underset{f}{E}[f = f^-]$, вводятся классы «нормальных» полунепрерывных снизу и сверху функций $NLS = \underset{f}{E}[f = (f^-)_-]$ и $NUS = \underset{f}{E}[f = (f_-)^-]$. Исследуются связи между классами LS, NLS, $L = \underset{f}{E}[f = f_*]$ и $NL = \underset{f}{E}[f = (f^*)_*]$. Показывается, что если пространство X вполне регулярно, то $\widetilde{C} \cong NLS$.

Изучается связь между регулярными открытыми множествами и *NLS*-функциями. Показывается, что для того, чтобы $f \in NLS$, необходимо и достаточно существование семейства $\{x_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, регулярных открытых множеств со свойствами: 1) $x_\lambda \subset x_\mu$ при $\lambda > \mu$, 2) $f(p) = \sup \lambda E[p \in x_\lambda]$. Устанавливается, что структуры регулярных открытых множеств пространств X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда $NLS(X) \cong NLS(Y)$. *Г. Я. Арешкин*

1590 РЕЦ. О числе классов абелевых числовых полей. Хассе (Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Hasse Helmut, S. 190, Akademie-Verlag, Berlin, 1952) [**Рецензия: Главка** (Hlawka E.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 39—40 (нем.); **Курота 數学** (Сугаку) (黑田戰勝), 1953, **4**, № 4, 58—60 (япон.)]

См также: 1517—1519, 1526 **РЕЦ**, 1527 **РЕЦ**, 1534, 1535, 1540, 1623, 1697, 1709, 1713, 1775, 1782—1787, 1800, 1801, 1804, 1805, 1808, 1814—1815, 1828 **РЕЦ**, 1829 **РЕЦ**, 1931

ТОПОЛОГИЯ

1591. Об одном классе абстрактных пространств. Шапич (Sur une classe d'espaces abstraits. Papić Pavle), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 19, 1843—1845 (франц.)

Исследуются T_1-пространства, обладающие базой, для любых элементов O_1 и O_2 которой либо $O_1 \supseteq O_2$, либо $O_2 \supseteq O_1$, либо $O_1 \cap O_2 = 0$, причем каждый элемент этой базы является окрестностью любой своей точки. Такие базы автор называет ветвящимися. Доказывается, что все пространства этого (довольно узкого) класса обладают рядом специальных свойств. Например, все они всюду разрывны и вполне нормальны. *Ю. М. Смирнов*

1592. Орбитальные топологии. Эллис (Orbital topologies. Ellis D.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 14, 117—119 (англ.)

Для каждого конечно-кратного отображения g произвольного множества S в себя автор строит такую нетривиальную топологию множества S, в которой g оказывается непрерывным; в том случае, когда g является взаимно однозначным отображением на все S, оно оказывается гомеоморфным. В качестве приложения для каждого кардинального числа m строится такое T_1-пространство мощности m, группа гомеоморфизмов которого содержит абелеву подгруппу всех инволюторных гомеоморфизмов той же мощности m. *Ю. М. Смирнов*

1593. Распространение покрытий, псевдометрик и отображений в линейные пространства. Аренс (Extension of coverings, of pseudometrics, and of linear-space-valued mappings. Arens Richard), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 2, 211—215 (англ.)

Пусть A — замкнутое множество топологического пространства X. Псевдометрикой множества A называется всякая неотрицательная действительная функция $r(x, y)$ двух переменных $x \in A$ и $y \in A$ такая, что $r(x, x) = 0$ и $r(x, z) \leqslant r(x, y) + r(y, z)$ для любых x, y и z (равенство $r(x, y) = r(y, x)$ не предполагается). Псевдометрика называется γ-сепарабельной, если существует множество мощности не большей γ, пересекающееся с каждой ε-окрестностью любой точки $x \in A$.

Доказывается эквивалентность следующих трех предложений: 1) во всякое счетное локально конечное открытое (в A) покрытие множества A можно вписать покрытие, которое может быть продолжено в счетное локально конечное открытое покрытие всего X; 2) всякая сепарабельная псевдометрика множества A может быть продолжена в сепарабельную псевдометрику всего X; 3) всякое непрерывное отображение множества A в сепарабельное замкнутое выпуклое множество Y банахова пространства может быть продолжено в непрерывное отображение всего X в Y.

Если в этих предложениях слова «счетное» и «сепарабельное» заменить соответственно словами «мощности не больше γ» и «γ-сепарабельное», то эквивалентность не нарушится. Отсюда следует, что эквивалентность имеет место и без предположений о счетности и сепарабельности. Из известной леммы П. С. Урысона о продолжении функций легко следует, что предложение 3), а следовательно, 1) и 2) справедливы в случае нормальности пространства X. В случае паракомпактности пространства X все эти предложения справедливы и без предположений о счетности и сепарабельности. *Ю. М. Смирнов*

1594. Почти локально полиэдральные сферы. Харролд, Мойс (Almost locally polyhedral spheres. Harrold O. G., Jr, Moise E. E.), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 575—578 (англ.)

Пусть K — топологическая двумерная сфера, расположенная в трехмерном евклидовом пространстве R^3; A и B — соответственно внутренняя и внешняя по отношению к K области пространства R^3, причем считаем, что B замкнуто на бесконечности одной точкой. Как известно (Alexander J. W., Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1924, **10**, 6—8), если K—полиэдр, то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ являются трехмерными элементами. Если же K не является полиэдром, то это, вообще говоря, неверно.

Автор называет множество $K \subset R^3$ локально полиэдральным в точке $p \in R^3$, если существует окрестность точки p, пересечение которой с K либо пусто, либо есть полиэдр. Доказывается, что если топологическая двумерная сфера K, расположенная в R^3, не является локально полиэдральной лишь в одной точке, то области A и B односвязны, причем замыкание хотя бы одной из них является трехмерным элементом. Если же локальная полиэдральность сферы K нарушается не более чем в трех точках,

то хоть одна из областей A, B односвязна. Заметим, что, как показывают примеры Артина и Фокса (Fox R., Artin E., Ann. Math., 1948, 49, 979—990), при нарушении локальной полиэдральности в четырех точках обе области A, B могут не быть односвязными.

И. И. Гордон

1595. Вычисление некоторых гомотопических групп. Серр (Quelques calculs de groupes d'homotopie. Serre Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 26, 2475—2477 (франц.)

Будем обозначать через Z_α циклическую группу порядка $\alpha = 2, 3, \ldots, \infty$. Автор утверждает, что $\pi^9(S^3) = Z_3$, $\pi^{10}(S^3) = Z_{15}$, $\pi^{11}(S^3) = Z_2$, $\pi^{10}(S^4) = Z_2 + Z_{24}$, $\pi^{n+6}(S^n) = Z_2$, если $n \geqslant 5$; $\pi^{11}(S^4) = Z_{15}$, $\pi^{12}(S^5) = Z_{30}$, $\pi^{13}(S^6) = Z_{60}$, $\pi^{14}(S^7) = Z_{120}$, $\pi^{15}(S^8) = Z_\infty + Z_{120}$, $\pi^{n+7}(S^n) = Z_{240}$, если $n \geqslant 9$; $\pi^{12}(S^4) = Z_2$, $\pi^{13}(S^5) = Z_2$, $\pi^{14}(S^6) = Z_2 + Z_{24}$, $\pi^{15}(S^7) = Z_2 + Z_2 + Z_2$, $\pi^{16}(S^8) = Z_2 + Z_2 + Z_2 + Z_2$, $\pi^{17}(S^9) = Z_2 + Z_2 + Z_2$, $\pi^{n+8}(S^n) = Z_2 + Z_2$, если $n \geqslant 10$. Кроме того, в заметке описаны некоторые гомотопические группы ортогональных групп.

М. М. Постников

1596. Отображения в пространства, некоторые гомотопические группы которых тривиальны. Олум (On mappings into spaces in which certain homotopy groups vanish. Olum Paul), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 561—574 (англ.)

Дается гомотопическая классификация непрерывных отображений n-мерного связного локально конечного полиэдра в произвольное линейно связное пространство, асферичное в размерностях, больших единицы и меньших n. По существу она совпадает с классификацией, данной референтом (Докл. АН СССР, 1949, **67**, № 3, 427—430).

М. М. Постников

1597 Д. О различных видах полноты топологических пространств. Киртадзе Г. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1953

См. также: 1518, 1527 **РЕЦ**, 1531 **РЕЦ**, 1575, 1576, 1586, 1587, 1589, 1600, 1627, 1686, 1709

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1598. R-множества. Ляпунов А. А., Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1953, **40**, 1—68

В монографии дается систематическое исследование R-множеств — класса множеств, которые строятся при помощи R-операций, представляющих известное обобщение A-операции. Эти операции были введены в неопубликованной работе А. Н. Колмогорова в 1922 г. Некоторые из теорем А. Н. Колмогорова, а также результаты дальнейших исследований были приведены в главе III работы Л. В. Канторовича и Е. М. Ливенсона об аналитических операциях над множествами (Fundam. math., 1933, **20**, 54 — 97).

Автор использует, наряду с методами теории аналитических операций над множествами, также метод решета (трансфинитных индексов), разработанный Н. Н. Лузиным и П. С. Новиковым.

Пусть $\mathfrak{N} = \{\nu\}$, $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$, есть некоторое множество последовательностей. $R_{\mathfrak{N}}$-цепью назовем такое множество кортежей $\vartheta = \{(n_1, n_2, \ldots, n_k)\}$, что: 1) пустой кортеж принадлежит ϑ и 2) если кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \vartheta$, то те n_{k+1}, для которых $(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}) \in \vartheta$, образуют цепь, принадлежащую $\mathfrak{N}$. Тогда $R_{\mathfrak{N}}$-операция над таблицей множеств $\mathcal{E} = \{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ определяется так:

$$R_{\mathfrak{N}}(\{E_{n_1,\ldots,n_k}\}) = \sum_{\vartheta} \prod_{(n_1,n_2,\ldots,nk) \in \vartheta} E_{n_1,\ldots,n_k},$$

где сумма распространена по всем $R_{\mathfrak{N}}$-цепям ϑ. Этот путь позволяет по всякой положительной аналитической операции над множествами $\Phi_{\mathfrak{N}}$ (см. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1937) строить другую операцию $R_{\mathfrak{N}}$.

Если R_0 — операция пересечения, R_0^c — операция суммирования, то R_1, R-операция, построенная по R_0^c, будет A-операцией, R_1^c — дополнительная к ней операция, есть операция Г (дающая CA-множества); R-операцию, построенную по R_1^c, назовем R_2-операцией и т. д. Таким образом могут быть построены операции R_α и R_α^c для всех трансфинитных α 1-го и 2-го класса. Применение этих операций к открытым множествам и приводит к классу R-множеств и его подклассам — R^α-классам.

Наряду с приведенным, автор дает другое эквивалентное определение R-операции при помощи довольно простого трансфинитного процесса. Этот процесс позволяет ввести внутренние и внешние индексы для точек множеств, получаемых при помощи R-операции.

Далее, в главе I рассматривается вопрос об измеримости R-множеств и устанавливается основной для этого вопроса факт, что если $\Phi_{\mathfrak{N}}$-операция измерима (т. е. приводит к измеримым множествам, если исходит от измеримых), то и $R_{\mathfrak{N}}$ — измеримая операция. Аналогичное обстоятельство обнаруживается и относительно свойства Бэра.

В главе II устанавливается при помощи ряда лемм предложение о сравнении индексов, утверждающее, что множество точек, в которых индекс $R_{\mathfrak{N}}$-операции над некоторой таблицей множеств $\geqslant$ индекса $R_{\mathfrak{M}}$-операции над другой таблицей, может быть получено при помощи $R_{\mathfrak{L}}$-операции над некоторой таблицей, причем входящие в нее множес ва и множество $\mathfrak{L}$ просто конструируются на основании имеющихся данных. Эта теорема играет ту же роль, что и теорема П. С. Новикова о сравнении индексов в теории A-множеств.

В главе III, посвященной R-множествам, получены теоремы относительно этих множеств, опирающиеся на ранее установленные факты об R-операциях. В частности, получается существование множеств всех классов R^α, не принадлежащих предыдущим классам (то же самое для подклассов этой классификации), топологическая инвариантность классов, измеримость и свойство Бэра.

Далее устанавливается тот основной факт, что R-множества входят во второй проективный класс, точнее в $P_2 \cap C_2$. Доказательство основывается на теореме о сравнении индексов и теореме Л. В. Канторовича и Е. М. Ливенсона об оценке проективного класса результата δs-операции.

В главе IV процесс перехода к R-операции (посредством индексов) применяется не по отношению к положительной аналитической операции, а к произвольной. Построенные индуктивно этим путем операции R_α для чисел α первого и второго рода не выводят за пределы R-множеств, но для трансфинитных чисел α третьего класса приводят к некоторым новым классам множеств, дескриптивная природа которых не изучена, но установлена их измеримость.

В главе V путем введения некоторой новой T-операции, также определяемой при помощи индексов, дается другой путь определения R-множеств.

В главе VI автор вводит понятие дескриптивной измеримости множества, которое включает в себя, в частности, как измеримость, так и свойство Бэра. Устанавливается дескриптивная измеримость не только ранее введенных операций, но и вводимых впервые в этой главе операций T с переменной базой, которые определяются трансфинитной индукцией по системе баз $\{N_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ для того случая, когда эти базы N_α связаны с дескриптивно-измеримыми операциями. Это дает возможность определить $2^{\aleph_1}$ таких операций, не эквивалентных между собой. Результаты главы I, как указывается во введении, имелись в упоминавшейся рукописи А. Н. Колмогорова, которая не была известна автору в момент написания работы. *Л. В. Канторович*

1599. Упорядочение множеств. Данжуа (L'ordination des ensembles. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 10, 981—983 (франц.)

Автор развивает некоторые соображения в пользу отрицательного решения проблемы Суслина. *А. С. Есенин-Вольпин*

1600. Интегральные представления степени отображения. Родниянский А. М., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 5, 1019—1021

Пусть G—ограниченная область в R^n, G_g — ее граница, f — непрерывное отображение $\overline{G}$ в R^n и $\gamma(f, y)$ — степень отображения f в точке $y \in R^n \setminus fG_g$. Доказывается, что $\gamma(f, y)$ постоянна на каждой компоненте O множества $R^n \setminus fG_g$ и эта величина обозначается через $\gamma(f, O)$. При дополнительном предположении дифференцируемости отображения f показывается, что

$$\gamma(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J(x)$$

($J(x)$ — якобиан отображения f, $x \in G$), а для случая непрерывной дифференцируемости отображения f и суммируемости $J(x)$ на некоторой компоненте O множества $R^n \setminus fG_g$ выводится формула

$$\gamma(x, O) = \frac{1}{\operatorname{mes} O} \int\limits_{f^{-1}O} J(x)\, dx .$$

Если, наконец, отображение f непрерывно дифференцируемо в области $U \supset \overline{G}$, $\operatorname{mes} G_g = 0$ и $\varphi(y)$ суммируема на множестве fG, то

$$\int\limits_G \varphi[f(x)] J(x)\, dx = \sum_k \gamma(f, O_k) \int\limits_{O_k} \varphi(y)\, dy,$$

где суммирование распространено на все компоненты множества $R^n \setminus fG_g$ (это, очевидно, есть обобщение классической формулы замены переменного в интеграле). Исходя из указанных теорем, автор доказывает и некоторые другие свойства отображений. Например, если f есть функция комплексного переменного ($n = 2$), аналитическая в G и непрерывная в $\overline{G}$, то величина

$$\frac{1}{\operatorname{mes} O} \iint\limits_{f^{-1}O} |f'(z)|^2 dx\, dy$$

равна сумме кратностей w — точек функции f, лежащих в G ($w \in G$). *Л. Д. Кудрявцев*

1601. Об определении линейного интеграла для однократно дифференцируемых функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица. Дубовицкий А. Я., Уч. зап. Вологодского гос. пед. ин-та, 1953, **11**, 179—185

Автор обобщает лемму А. С. Кронрода, используемую для обоснования понятия линейного интеграла функции двух переменных, и показывает, что если определенная на единичном квадрате функция $f(\eta)$, однократно дифференцируемая или удовлетворяющая условию Липшица, обращается в нуль на континууме K, то для всяких двух точек ξ и ζ, принадлежащих K, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая спрямляемая дуга L, соединяющая ξ и ζ, что $\int\limits_L |f(\eta)|\, d\eta < \varepsilon$.

П. И. Романовский

1602. Функции Липшица от непрерывных функций. Маркс, Пиранян (Lipschitz functions of continuous functions. Marx Imanuel, Piranian George), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 447—459 (англ.)

В работе даются два определения функции Липшица от непрерывных функций. Если $f(x)$ — непрерывная, принимающая действительные значения функция t, то функцией Липшица $\alpha(t_0, f)$ авторы называют верхнюю грань всех α, для которых

$$Q(\alpha, t_0, f) = \limsup_{h \to 0} \frac{|f(t_0 + h) - f(t_0)|}{|h|^\alpha}$$

конечно.

Доказываются теоремы:

1. Если $f(t)$ — непрерывная ($-\infty < t < \infty$), то $\alpha(t, f)$ — нижний предел последовательности не-

прерывных функций от t; если $\alpha(t,f)>1$ всюду на некотором открытом интервале, то всюду на этом интервале $\alpha(t,f)=\infty$.

2. Если $\{\alpha_n(t)\}$ — последовательность непрерывных функций $(0\leqslant\alpha_n(t)\leqslant 1)$, то существует такая непрерывная функция $f(t)$, что

$$\alpha(t,\ f)=\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(t).$$

Первая из этих теорем очевидна. При доказательстве второй авторы исходят из доказательства Лауда (Loud W. S., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 358—360) следующей теоремы:

Если α — постоянное $(0<\alpha<1)$, то существует такая непрерывная функция $f(t)$ и пара таких постоянных k_1 и k_2, что для всех h

$$|f(t+h)-f(t)|<k_1|h|^{\alpha},$$

$$\limsup_{h\to 0}\frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|^{\alpha}}>k_2\ .$$

Авторы не изучают случая, когда $\alpha(t,f)$ обращается в некоторых точках в бесконечность, считая это исследование трудным.

Локальной функцией Липшица от функции $f(t)$ в работе называется

$$\beta(t,f)=\lim_{h\to 0}B(t,h,f),$$

где $B(t,h,f)$—верхняя грань чисел β таких, что выражение

$$\frac{|f(t'')-f(t')|}{(t''-t')^{\beta}}$$

остается ограниченным при всех t', t'', удовлетворяющих условию

$$t-h\leqslant t'<t+h\ .$$

Доказываются теоремы:

1. Если $f(t)$ непрерывна $(-\infty<t<\infty)$, то 1) $\beta(t,f)$ полунепрерывна снизу; 2) для каждой точки t либо $0\leqslant\beta(t,f)\leqslant 1$, либо $\beta(t,f)=\infty$; 3) множество точек, в которых $\beta(t,f)\neq\infty$, совершенно.

2. Если $\beta(t)\ (0\leqslant\beta(t)\leqslant 1)$ — непрерывная снизу функция, то существует строго возрастающая непрерывная функция $F(t)$, для которой

$$\beta(t,F)=\beta(t).$$

Б. М. Гагаев

1603 РЕЦ. **Теория функций действительного переменного. Джефри** (The theory of functions of a real variable. Jeffery R. L., pp. 232, Toronto, University Press, 1951) [**Рецензия: Радон** (Radon J.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 35—36 (нем.)]

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

1604. Об одном обобщении тригонометрически сопряженных рядов. Бабакова О. И., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1241—1244

Каждой периодической функции из L^2

$$F(t)\sim a_0+\sum_0^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

автор относит при фиксированном $h\ (0<h<1)$ две функции

$$A_hF(t)\sim\sum_0^{\infty}\frac{1+h^{2k}}{1-h^{2k}}(a_k\sin kt-b_k\cos kt),$$

$$B_hF(t)\sim\sum_1^{\infty}\frac{1-h^{2k}}{1+h^{2k}}(b_k\cos kt-a_k\sin kt)$$

и называет их обобщенными сопряженными с $F(t)$ функциями 1-го и 2-го рода. Обычная сопряженность (с точностью до знака) имеет место при $h=0$.

Представления обоих операторов A_h и B_h получаются в виде главных значений интегралов

$$A_hF(t)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}F(x)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{t-x}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{t-x}{2\pi}\right)}\,dx,$$

$$B_hF(t)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}F(x)\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{x-t}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x-t}{2\pi}\right)}\,dx,$$

причем $\vartheta_k(u)=\vartheta_k(u\,|\,h)$ — эллиптические тэта-функции, и даются формулы обращения, которые при $h=0$ переходят в формулы обращения Гильберта.

Доказывается теорема аппроксимации, устанавливающая при любом $n\geqslant 1$ точные верхние грани для $E_n[G(t)]$ и $E_n[H(t)]$, где $G(t)=A_hF(t)$ и $H(t)=B_hF(t)$, если известно, что $|F^{(r)}(t)|\leqslant 1$ $(r=1,2,3,\ldots)$. При $h=0$ получается теорема М. Г. Крейна и референта.

Дается применение обобщенных сопряженных функций. Рассматривается двусвязная область, одной границей которой является окружность радиуса $q<1$, а другой границей — кривая (близкая к концентрической единичной окружности) с полярным уравнением $\rho=e^{\psi(\theta)}$. Ищется приближенное выражение для функции, отображающей указанную область на круговое кольцо. Здесь неизвестной величиной является также отношение h радиусов окружностей искомого кольца. Простые и компактные формулы, полученные автором, являются обобщением известных формул акад. М. А. Лаврентьева, которые получаются при $h=q=0$. При тех же предположениях о малости функции $\psi(\theta)$, что и у М. А. Лаврентьева, автор получает для отношения радиусов

$$h=q\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(t)\,dt\right]$$

и для отображающей на кольцо $h<|w|<1$ функции

$$z=w\exp\left[\frac{i}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\psi(t)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln r}{2\pi i}-\frac{t-\varphi}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln r}{2\pi i}-\frac{t-\varphi}{2\pi}\right)}\,dt\right]\ (w=re^{i\varphi}).$$

Соответствие точек на наружной границе дается формулой $\theta = \varphi + A_h\psi(\varphi)$. В статье имеются опечатки: 1) стр. 1242, 5-ая строка сверху, под знаком интеграла вместо $F(x)$ должно быть $\Phi(x)$, 2) стр. 1244, 9-ая строка снизу, коэффициент перед интегралом должен быть заменен на $\frac{i}{2\pi^2}$.

И. И. Ахиезер

1605. **Хаусдорфовские средние, для которых имеет место явление Гиббса. Ливингстон** (Some Hausdorff means which exhibit the Gibbs' phenomenon. Livingston Arthur E.), Pacif. J. Math, 1953, **3**, № 2, 407—415 (англ.)

Хаусдорфовским средним порядка n для последовательности $\{s_n\}$ называется выражение

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k}\, dg(t),$$

где $g(x)$ — функция с ограниченным изменением на сегменте $[0,1]$. Если $g(+0) = g(0)$, то h_n имеет при $n \to \infty$ тот же предел, что и s_n (см. Харди Г., Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 307—323).

Доказывается, что для хаусдорфовских средних ряда Фурье некоторой функции в точках разрыва последней имеет место явление Гиббса, если ядро $g(x)$ удовлетворяет одному из двух условий: 1) $g(x)$ — ступенчатая функция, точки разрыва которой линейно независимы в области рациональных чисел; 2) $g(x)$ имеет две точки разрыва. Предполагается, что $g(x)$ удовлетворяет упомянутому условию регулярности: $g(+0) = g(0)$. *Ф. И. Харшиладзе*

1606. **О наилучшем приближении многочленами в среднем дифференцируемых функций. Ибрагимов Н. И.,** Докл. АН Азерб. ССР, 1953, **9**, № 3, 135—141

Пусть $E_n(f)_L$ есть наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[-1, +1]$ в среднем в смысле L. Далее пусть $W^{(S)}V$ и $W^{(S+1)}L$ суть классы функций, заданных на $[-1, +1]$, каждая из которых есть S-кратный интеграл от функции соответственно ограниченной вариации или абсолютно непрерывной на $[-1, +1]$ с вариацией не большей единицы.

Имеет место соотношения

$$\sup_{f \in W^{(S)}V} E_n(f)_L = \sup_{f \in W^{(S)}V} \int_{-1}^{+1} |f(x) - u_n(f, x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(S+1)} \max_{1 \leqslant c \leqslant 1} E_n\{|x-c|^{S-1} + (x-c)|x-c|^{S-1}\}_L \leqslant$$

$$\leqslant \frac{G(S)}{n^{S+1}} + O\left(\frac{\ln n}{n^{S+2}}\right), \qquad (1)$$

где $G(S)$ — функция, выражаемая эффективно, и

$$u_n(f, x) = \frac{1}{2\Gamma(S+1)} \sum_{k=0}^{n} x^k \int_{-1}^{+1} \alpha_k^{(S)}(t)\, d\varphi(t), \varphi(t) = f^{(S)}(t),$$

при этом

$$P_n^{(S)}(x, c) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(S)}(c)\, x^k$$

есть многочлен степени n наилучший в среднем на $[-1, +1]$ для функции $|(x-c) + (x-c)|x-c|^{S-1}$.

В случае целого S эти результаты были получены референтом (Докл. АН СССР, 1947, **58**, № 2, 185—188) и тогда неравенство (1) превращается в равенство.

Результаты сформулированы в исправленном виде (в формулировках статьи имеются опечатки). *С. М. Никольский*

1607. **О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышева. Ганзбург И. М.,** Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1253—1256

Пусть H_ω обозначает класс функций $f(x)$, заданных на $[-1, +1]$, для которых выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|),$$

где x', $x'' \in [-1, +1]$ и $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, для которого справедливо

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\, \omega\left(\frac{\nu}{n^2}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Пусть, далее,

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} a_k \cos k \arccos x$$

— частичная сумма разложения f по многочленам Чебышева.

Доказано асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in H_\omega} |f(x) - s_n(f, x)| =$$

$$= \frac{2 \ln n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4u}{2n+1} \sqrt{1-x^2}\right) \sin u\, du +$$

$$+ O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (1)$$

Оно является обобщением соответствующих результатов референта (Изв. АН СССР, сер. мат., 1946, **10**, 295—322), рассмотревшего случай $\omega(t) = |t|$, и А. Ф. Тимана (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 6, 969—972), рассмотревшего случай $\omega(t) = |t|^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. В частности, для последнего случая в реферируемой работе доказывается ограниченность константы, входящей в остаточный член правой части (1), при $\alpha \to 1$.

С. М. Никольский

1608. **Наилучшая аппроксимация в L_1 и остаточный член в теореме Литлвуда. Корсвар** (Best L_1 approximation and the remainder in Littlewood's theorem. Korevaar Jacob), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 281—293; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 281—293 (англ.)

Изучается приближение периодических функций (с периодом 2π), имеющих кусочно-непрерывную m-ую производную (m может равняться нулю), тригонометрическими многочленами по метрике L_1. Как следствие получается теорема о приближении обыкновенными многочленами функций, заданных на $[a, b]$ и имеющих m-ую кусочно-непрерывную производную (m может равняться нулю) по метрике L_1. Из работы Карамата следует (Karamata J., Math. Z., 1930, **32**, 319—320), что оценки для равномерной аппроксимации функций многочленами, а также оценки для приближения в L_1 могут служить методом для получения «вещественных» тауберовых теорем для преобразования Лапласа. Осуществлению этой программы посвящено уже значительное количество работ, одной из которых является реферируемая работа, а другие указываются в приложенном к работе списке литературы (нет указаний на работу Freud G., Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1951, **2**, № 3—4, 299—308). В реферируемой статье устанавливается следующая специализация известной теоремы Литлвуда:

Пусть $a(t)$ интегрируема в каждом конечном интервале $(0, T)$, пусть

$$|a(t)| < \frac{K_3}{t} \quad (t > 0) \quad \text{и} \quad \left| \int_0^\infty a(t)\, e^{-ut} dt \right| < K_4 u.$$

Тогда при $T > 1$ имеет место

$$\left| \int_0^T a(t)\, dt \right| < \frac{C}{\log T}.$$

Дается также оценка

$$\left| \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m a(t)\, dt \right| < \frac{C_m}{(\log T)^{m+1}}.$$

Строится пример, показывающий неулучшаемость оценки. *А. Г. Постников*

1609. Приближение периодических функций линейными тригонометрическими полиномиальными операциями. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1249—1252

Пусть E — функциональное пространство, обладающее следующими свойствами: 1) элементы E суть периодические периода 2π суммируемые функции; 2) при обычном определении сложения функций и умножения функции на число, E является линейным нормированным пространством; 3) если $f(x) \in E$, то при любом $-\infty < t < \infty$, $f(x+t) \in E$; 4) существует множество G периода 2π функций, суммируемых на $[0, 2\pi]$ такое, что:

а) если $f(x) \in E$ и $g(x) \in G$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\, g(x)|\, dx < \infty,$$

б) если $f(x) \in E$, то

$$\| f \|_E = \sup_{g \in G} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

в) если $g(x) \in G$, то при любом $-\infty < t < \infty$ $g(x+t) \in G$,

г) если $g(x) \in G$, а $h(x)$ — измеримая периода 2π функция, для которой почти всюду $|h(x)| \leqslant 1$, то $g(x)\, h(x) \in G$; 5) множество всех тригонометрических полиномов содержится в E и всюду плотно в нем.

Пусть, далее, $\Phi_n(t)$ — некоторый тригонометрический полином порядка n и

$$\sigma_n(f; x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\, \Phi_n(t)\, dt. \tag{1}$$

В работе рассматриваются линейные операторы $U(f; x)$, отображающие E в подпространство тригонометрических полиномов n-го порядка и совпадающие на этом подпространстве с оператором (1). Для любого подмножества K единичной сферы в E, обладающего тем свойством, что если $f(x) \in K$, то и $f(x+t) \in K$ $(-\infty < t < \infty)$, устанавливается неравенство

$$\sup_{f \in K} \| f - \sigma_n(f) \| \leqslant \sup_{f \in K} \| f - U(f) \|$$

и приводится его обобщение на многомерный случай. *А. Ф. Тиман*

1610. О разложении функций двух переменных в ряды по ортогональным многочленам простейшего вида. Натансон И. П., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1275—1277

Пусть $p(x)$ и $q(y)$ — две интегрируемые и почти везде строго положительные функции, заданные на отрезках $a \leqslant x \leqslant b$ и $c \leqslant y \leqslant d$. Обозначим через $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_m(y)\}$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ ортонормальные системы многочленов с весами, соответственно, $p(x)$ и $q(y)$. Степени φ_n и ψ_m равны, соответственно, n и m, а старшие коэффициенты их положительны. Положим

$$\omega_{n,m}(x, y) = \varphi_n(x)\, \psi_m(y),$$
$$K(x, y) = p(x)\, q(y),$$
$$R = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Доказана следующая теорема:

Пусть многочлены $\varphi_n(u)$ ограничены в точке x, а многочлены $\psi_m(v)$ в точке y. Если функция $f(u, v)$ интегрируема с весом $K(u, v)$ и такова, что

$$\iint_R K(u, v) \left[\frac{f(u, v) - f(u, y) - f(x, v) + f(x, y)}{(u - x)(v - y)}\right]^2 \times du\, dv < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b p(u) \left[\frac{f(u, y) - f(x, y)}{u - x}\right]^2 du < +\infty, \\ &\int_c^d q(v) \left[\frac{f(x, v) - f(x, y)}{v - y}\right]^2 dv < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то в точке (x, y) функция $f(u, v)$ разлагается в ряд

$$\sum_{i,k} c_{i,k}\, \omega_{i,k}(x, y), \tag{3}$$

где

$$c_{i,k} = \iint\limits_R K(x, y)\, f(x, y)\, \omega_{i,k}(x, y).$$

Приводятся также следующие утверждения:

1. Если многочлены $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены на $[a, b]$, то в первом из условий (2) можно заменить квадрат дроби $[f(u, y) - f(x, y)] / (u - x)$ на ее модуль. Если же $\varphi_n(x)$ и $\psi_m(y)$ равномерно ограничены, то во всех условиях (1) и (2) можно заменить квадраты подинтегральных дробей на модули этих дробей.

2. Если веса $p(x)$ и $q(y)$ ограничены, то в предыдущей теореме условия (1) и (2) можно заменить условиями

$$|f(u, v) - f(u, y) - f(x, v) + f(x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant K |u - x|^{\lambda} |v - y|^{\mu},$$
$$|f(u, y) - f(x, y)| \leqslant A |x - u|^{\alpha},$$
$$|f(x, v) - f(x, y)| \leqslant B |y - v|^{\beta},$$

где K, A, B, λ, μ, α, β — некоторые положительные постоянные.

3. Если всюду в R существуют ограниченные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, то $f(x, y)$ разлагается в ряд (3) в каждой точке, где ограничены $\varphi_n(x)$ и $\psi_m(y)$. Если же веса $p(x)$ и $q(y)$ сами ограничены, то для разложимости $f(x, y)$ в ряд (3) во всех точках, где ограничены $\varphi_n(x)$ и $\psi_m(y)$, достаточно, чтобы всюду в R существовали ограниченные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

4. Положим

$$H_{n,m} = \sup \iint\limits_R K(u, v) \times$$
$$\times \left| \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \omega_{i,k}(u, v)\, \omega_{i,k}(x, y) \right| du\, dv.$$

Если $f(x, y)$ непрерывна на R и $E_{n,m}$ — ее наилучшее приближение многочленами степени не выше n по x и не выше m по y, то

$$|S_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant (1 + H_{n,m})\, E_{n,m},$$

где

$$S_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{i,k} \omega_{i,k}(x, y).$$

Д. Е. Меньшов

1611. Приближенное представление функций. Никольский С. М., Природа, 1953, № 8, 12—20

Популярный очерк, позволяющий читателю познакомиться с содержанием и этапами развития конструктивной теории функций. Общедоступно разъяснено, в чем заключаются методы интерполирования, квадратического и наилучшего равномерного приближения. Излагаются с некоторой подробностью основные результаты П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна; указывается также на вклады, сделанные другими математиками (Колмогоров, Меньшов, Лаврентьев, Келдыш, Микеладзе, Мергелян); отмечается роль тригонометрических полиномов в исследованиях И. М. Виноградова в области теории чисел.

Заслуживают внимания следующие мысли: 1) необходимо сделать все возможное, чтобы изобильный материал, накопленный конструктивной теорией функций, стал доступен для практиков-вычислителей; 2) надо «сильнее подчинить» направление теоретических исследований требованиям, предъявляемым численными методами анализа, в частности, «машинной» математикой. *В. Л. Гончаров*

1612 РЕЦ. Почти периодические функции. Маак (Fastperiodische Funktionen. Maak Wilhelm. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 61, pp. VIII + 240, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1950, 21.60 DM) [**Рецензия: Удзава (宇沢弘文), 數學** (Сугаку), 1953, 4, № 4, 60—61 (япон.)

1613 Д. О некоторых методах решения задачи наилучшего равномерного приближения для системы несовместных линейных уравнений. Штейнберг А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., ЛГУ, Л., 1953

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

1614. Операции сглаживания и их образующие функции. Шёнберг (On smoothing operations and their generating functions. Schoenberg I. J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 3, 199—230 (англ.)

Обзор ряда сравнительно недавних исследований, в которых преобразование

$$y_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{m-\nu} x_\nu \quad (\pm m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

и его континуальный аналог

$$g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(x - t)\, f(t)\, dt \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (2)$$

изучаются как операции сглаживания. Предполагая, что $a_m = a_{-m}$ и $|a_m| \leqslant Ae^{-B|m|}$ ($\pm m = 0, 1, 2, \ldots$), автор вводит для преобразования (1) образующую функцию

$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

и характеристическую функцию

$$\Phi(u) = F(e^{iu}) = a_0 + 2a_1 \cos u + 2a_2 \cos 2u + \cdots$$

Чтобы преобразование (1) оставляло инвариантной последовательность $\{x_m\}$ равноотстоящих ординат любого полинома степени $\leqslant 2k - 1$, но не выше, необходимо и достаточно, чтобы в окрест-

ности нуля имело место разложение

$$\Phi(u) = 1 - \lambda u^{2k} + \cdots \quad (\lambda \neq 0). \tag{3}$$

Автор называет преобразование (1) сглаживающей формулой, если

$$|\Phi(u)| < 1 \quad (0 < u < 2\pi). \tag{4}$$

При предположении, что $\sum_{-\infty}^{\infty} |x_\nu| < \infty$, и обозначениях

$$\xi(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_\nu e^{i\nu u}, \quad \eta(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} y_\nu e^{i\nu u}$$

имеет место соотношение

$$\eta(u) = \xi(u)\,\Phi(u)$$

и при любом целом $m \geqslant 0$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\Delta^m x_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[2\sin\frac{u}{2}\right]^{2m} |\xi(u)|^2\,du,$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\Delta^m y_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[2\sin\frac{u}{2}\right]^{2m} |\eta(u)|^2\,du;$$

поэтому, в силу (4)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\Delta^m y_\nu|^2 < \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\Delta^m x_\nu|^2,$$

что и является основанием для термина «сглаживающая формула». При n-кратной итерации преобразования (1) получается последовательность

$$y_m^{(n)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{m-\nu}^{(n)} x_\nu \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Для $n \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$a_\nu^{(n)} = (\lambda n)^{-1/2k} G_k\left(\nu(\lambda n)^{-1/2k}\right) + \varepsilon_\nu^{(n)},$$

где λ и k те же, что и в (3), величина $\varepsilon_\nu^{(n)}$ есть $o(n^{-1/2k})$ равномерно по ν, а

$$G_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{2k}} \cos vx\,dv.$$

Постановка этого вопроса принадлежит Форе (E. L. de Forest), а результат при общих условиях настоящей статьи принадлежит автору (Schoenberg I. J., Courant Annivers. vol. «Studies and Essays», N. Y., 1948). Указанный итерационный процесс связывается с приближенным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{k+1}\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}.$$

Специальные формулы для аналитической аппроксимации произвольных эквидистантных ординат $\{y_\nu\}$ автор предложил в 1946 г. (Quart. Appl. Math., 1946, 4, ч. A, 45—99, ч. B, 112—141). Они имеют вид

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu\, L(x-\nu),$$

где $L(x)$ есть некоторая четная целая функция, зависящая от индекса k ($k = 1, 2, \ldots$). Если $y_\nu = P(\nu)$, где $P(x)$ — многочлен степени $2k-1$, то $f(x) = P(x)$. При $x = n$ получается преобразование

$$f(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L(n-\nu)\, y_\nu \tag{5}$$

типа (1). Поставленный автором в 1946 г. вопрос, не есть ли (5) сглаживающая формула, требует для своего положительного решения доказательства того, что ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} M_k(\nu, t)\, z^\nu \quad (0 < |z| < \infty),$$

где $t > 0$ — параметр и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} M_k(x, t)\,dx = e^{-tu^2/4}\left(\frac{2\sin u/2}{u}\right)^k,$$

допускает представление

$$F(z) = C\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu z)(1+\alpha_\nu z^{-1}),$$

причем $\alpha_\nu = \alpha_\nu(t)$ вещественны, $0 < \alpha_\nu < 1$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu < \infty$, $C = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\alpha_\nu)^{-2}$. Это доказательство приводится в статье на основе следующей общей теоремы Эдрея (находится в печати в Trans. Amer. Math. Soc.): ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

сходящийся в кольце $r < |z| < r^{-1}$, содержащем единичную окружность, представляет функцию, мероморфную в области $0 < |z| < \infty$ и имеющую вид

$$F(z) = Ce^{az+bz^{-1}} z^m \frac{\prod_1^{\infty}(1+\alpha_\nu z)\prod_1^{\infty}(1+\beta_\nu z^{-1})}{\prod_1^{\infty}(1-\gamma_\nu z)\prod_1^{\infty}(1-\delta_\nu z^{-1})},$$

где

$$C > 0,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ m \text{ — целое},\ \alpha_\nu \geqslant 0,\ \beta_\nu \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant \gamma_\nu < 1,\ 0 \leqslant \delta_\nu < 1,\ \sum(\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu + \delta_\nu) < \infty,$$

в том и только том случае, если последовательность $\{a_n\}$ вполне позитивна, т. е. все миноры матрицы $\| a_{i-j} \|$ неотрицательны. Континуальным аналогом вполне позитивной последовательности является, по терминологии автора, функция частоты Полиа, т. е. измеримая функция $\Lambda(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x)\, dx < \infty$$

при условии, что $\det \| \Lambda(x_i - t_j) \|_{1,n} \geqslant 0$ каковы бы ни были число n и числа $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Как вполне позитивные последовательности и их континуальные аналоги, так и вполне позитивные матрицы и ядра изучались с различных точек зрения М. Г. Крейном, а также Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном (Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, М.—Л., 1950, 297).

Для того, чтобы $\Lambda(x) \geqslant 0$ была функцией частоты Полиа, необходимо и достаточно, чтобы ее двустороннее преобразование Лапласа

$$\frac{1}{\Psi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs} \Lambda(x)\, dx$$

сходилось в какой-нибудь вертикальной полосе, содержащей внутри точку $s = 0$, и чтобы

$$\Psi(s) = Ce^{-\gamma s^2 + \delta s} \prod_{1}^{\infty} (1 + \delta_\nu s)\, e^{-\delta_\nu s},$$

где $C > 0$, $\gamma \geqslant 0$, δ, δ_ν вещественны, $0 < \gamma + \sum_{1}^{\infty} \delta_\nu^2 < \infty$. Это предложение позволяет построить для интеграла (2) способы обращения и теорию представления, аналогичные имеющимся для одностороннего преобразования Лапласа. Автор приводит некоторые относящиеся сюда результаты и цитирует работы Уиддера и Хиршмана.

Замечательное, с точки зрения сглаживания, свойство преобразования (2) где $\Lambda(x)$ — функция частоты Полиа, состоит в том, что если $v(f)$ есть supremum числа изменений знака в последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, где $-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \infty$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то из (2) следует $v(g) \leqslant v(f)$ в том и только в том случае, когда $\Lambda(x)$ — функция частоты Полиа. Аналогичное предложение установлено автором для преобразования последовательностей (1). Библиография, 62 названия. *Н. И. Ахиезер*

1615. О некоторых методах суммирования интегралов Фурье. Ганзбург И. М., Научн. зап. Днепропетровского гос. ун-та, 1953, **41**, 145—151

В ранее опубликованной работе Натансон И. П. (Мат. сб., 1940, **7(49)**, № 2, 313 — 320) перенес метод Бернштейна — Рогозинского суммирования рядов Фурье на интегралы Фурье. Здесь эти результаты обобщаются и дополняются. Пусть

$$f(t) \in L(-\infty, +\infty), \quad a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut\, dt.$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut\, dt,$$

$$S_\lambda(x) = \int_{0}^{\lambda} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux]\, du.$$

Теорема 1. Если $0 < \lambda\alpha < C$ и x — точка Лебега $f(t)$, то при $\lambda \to +\infty$

$$S_\lambda(x + \alpha) + S_\lambda(x - \alpha) - 2\cos \lambda\alpha S_\lambda(x) - 4 \sin^2 \frac{\lambda\alpha}{2} f(x) \to 0.$$

Теорема 2. Пусть

$$S_\lambda(x) + S_\lambda\left(x - \frac{2\pi}{3\lambda}\right) + S_\lambda\left(x + \frac{2\pi}{3\lambda}\right) = 3T_\lambda(x).$$

Если

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(|x - y|),$$

причем

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\omega(u)}{u^3}\, du < C \frac{\omega(\delta)}{\delta^2},$$

то

$$|T_\lambda(x) - f(x)| < C_1 \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

В статье много опечаток. *И. П. Натансон*

См. также: 1518, 1534, 1547, 1589, 1618, 1637, 1656, 1596, 1702 **РЕЦ,** 1730, 1770

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1616. Применение римановой числовой сферы к выводу основных теорем сферической тригонометрии. Херцог (Die Anwendung der Riemannschen Zahlenkugel zur Herleitung der sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze. Herzog E. R.), Elem. Math., 1953, **8**, № 2, 31—35 (нем.)

При выводе соотношений между элементами сферического треугольника автор опирается на дробно-линейные преобразования, реализующие вращение числовой сферы, и на формулу стереографической проекции. *В. Л. Гончаров*

1617. О $|C|$-суммируемости степенных рядов. Чжоу (On the summability $|C|$ of a power series. Chow H. C.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 14, 152—160 (англ.)

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

называется $|C,\ k|$-суммируемым или абсолютно суммируемым методом $(C,\ k)$, если абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} t_n^{(k)}(\theta),$$

где

$$t_n^{(k)}(\theta) = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} \nu a_\nu e^{i\nu\theta},$$

$$A_n^k = \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(k+1)}, \quad k > 0.$$

Автором получено следующее необходимое и достаточное условие $|C,\ k|$-суммируемости:

Пусть $e^{i\theta}$ — точка, лежащая на дуге $(\alpha,\ \beta)$ единичной окружности. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-k} < \infty \quad (k > 0),$$

то для $|C,\ k|$-суммируемости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k-1} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f'(z)\{(e^{i\theta} - z)^{-k} + c_0 + c_1 z\} z^{-n} dz \right| < \infty,$$

где $|z| = r = 1 - \frac{1}{n}$, а $c_0 = c_0(\theta)$ и $c_1 = c_1(\theta)$ — некоторые постоянные, не зависящие от n.

Получено также аналогичное условие, достаточное для $|C,\ k|$-суммируемости почти во всех точках некоторой дуги. При помощи этих критериев находятся следующие простые достаточные условия $|C,\ k|$-суммируемости:

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-k} < \infty \ (k > 0) \text{ и } f'(z) = O(|e^{i\theta_0} - z|^{-\gamma})$$

$$(0 \leqslant \gamma < 1)$$

в окрестности точки $z = e^{i\theta_0}$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta_0}$$

$|C,\ k|$-суммируем.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-k} < \infty \quad (k > 0) \quad \text{и} \quad |f'(z)| < h(\theta)$$

на дуге $(\alpha,\ \beta)$ единичной окружности, причем $h(\theta)$ и $\Phi(\theta) \equiv \frac{1}{\theta - \theta_0} \int_{\theta_0}^{\theta} h(\varphi)\, d\varphi$ интегрируемы, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta_0}$$

$|C,\ k|$-суммируем.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-k} < \infty \ (k > 0)$$

и для всех достаточно малых r

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f'(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant M(1-r)^{-\gamma},$$

где $0 \leqslant \gamma < \min(k,\ 1)$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

$|C,\ k|$-суммируем почти для всех θ на дуге $(\alpha,\ \beta)$. *М. А. Евграфов*

1618. О тауберовых теоремах в области комплексного переменного. А г м о н (Complex variable Tauberians. A g m o n S h m u e l), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 444—481 (англ.)

Основные результаты автора представляют собой обобщения в том или ином виде теоремы Икехара (Ikehara S., J. Math. and Phys., 1931, **10**, 1—12), которую автор формулирует следующим образом: пусть в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$f(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-su}\, d\alpha(u), \tag{1}$$

где $\alpha(u)$ — действительная и неубывающая функция. Пусть затем

$$\lim_{\sigma \to +0} \left[f(\sigma + it) - \frac{A}{\sigma + it} \right] = \psi(t)$$

равномерно в каждом интервале $|t| < T$. Тогда

$$\alpha(u+h) - \alpha(u) \sim Ah \quad (u \to \infty)$$

равномерно для $0 < h_1 \leqslant h \leqslant h_2$ (h_1 и h_2 — произвольные положительные постоянные). Наиболее простой по форме результат автора состоит в следующем: пусть функция $f(s)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 0$ имеет вид (1), где $\alpha(u)$ не убывает и является ограниченной при $\sigma > 0$, $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant T$ для любых $0 < \varepsilon < T$ $(s = \sigma + it)$. Пусть далее имеется функция $\psi(s) = \sum a_n e^{-ns}$, аналитическая в $\mathrm{Re}(s) > 0$, и такая, что: 1) единственные особые точки $\psi(s)$ на мнимой оси суть точки $2k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. 2) $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n| > 0$, 3) $\ln |a_n|$ — выпуклая функция от n, 4) для некоторого T_0 $f(s) - \psi(s)$ ограничена в полуполосе $\sigma > 0$, $|t| \leqslant T_0$. Тогда

$$\alpha(u+h) - \alpha(u) \sim h a_{[u]} \quad (u \to \infty)$$

равномерно для $0 < h_1 \leqslant h \leqslant h_2$ ($[u]$ — целая часть u). Из этого результата получится предыдущая теорема, если в качестве $\psi(s)$ возьмем функцию

$$\psi(s) = A + Ae^{-s} + Ae^{-2s} + \cdots = \frac{A}{1 - e^{-s}}.$$

Другие теоремы автора имеют тот же характер, но формулируются более сложно.

Доказательства всех этих предложений основаны на использовании следующей основной теоремы: пусть $f(s)$ при $\mathrm{Re}(s) > 0$ имеет вид (1), причем абсциссу абсолютной сходимости интеграла (1) считаем равной 0. Положим

$$c_n = \int_n^{n+1} |d\alpha(u)|$$

и допустим, что имеется последовательность $\{q_n\}$ положительных чисел со свойствами: 1) $q_n \geqslant c_n$, 2) $\frac{q_n}{q_{n+1}} \to 1$, 3) $\ln q_{n+1} - 2\ln q_n + \ln q_{n-1} \leqslant \frac{c}{n}$.

При этих условиях семейство $\{f_x(s)\}$, где

$$f_x(s) = \frac{f(s) - \int_0^x e^{-su}\, d\alpha(u)}{q_{[x]} e^{-sx}},$$

будет равномерно ограничено в каждой замкнутой ограниченной области, где $f(s)$ регулярна.

А. Ф. Леонтьев

1619. О производящей функции вполне положительной последовательности, бесконечной в двух направлениях. Эдрей (On the generating function of a doubly infinite, totally, positive sequence. Edrei Albert), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 3, 367—383 (англ.)

Следуя Шёнбергу, автор называет бесконечную в двух направлениях последовательность $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ вполне положительной, если все миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

бесконечной в четырех направлениях, положительны.

Доказывается следующая теорема, высказанная Шёнбергом в виде предположения:

Если вполне положительная последовательность $\{a_n\}$ $(-\infty < n < \infty)$ не совпадает с последовательностью $\{a\rho^n\}$, $a > 0$, $\rho > 0$, $-\infty < n < \infty$, то ряд Лорана

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

сходится в некотором кольце $r_1 < |z| < r_2$ и его сумма $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = Ce^{b_1 z + b_{-1} z^{-1}} z^m \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha_\nu z)(1 + \beta_\nu z^{-1})}{(1 - \gamma_\nu z)(1 - \delta_\nu z^{-1})},$$

где m — целое число (необязательно положительное), $C \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 0$, $b_{-1} \geqslant 0$, α_ν, β_ν, γ_ν, $\delta_\nu \geqslant 0$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu + \gamma_\nu + \delta_\nu) < \infty.$$

М. А. Евграфов

1620. О теореме Полиа. Делаж (Sur un théorème de Pólya. Delange Hubert), Bull. sci. math., 1953, **77**, mars-avril, 56—62 (франц.)

В статье дается новое доказательство теоремы Полиа (Pólya, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys. Math. Kl., 1923, 45—50; см. также Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris, 1933, 138—140), утверждающей, что если ряд $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ имеет конечную абсциссу сходимости и

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \delta > 0,$$

то тогда всякий интервал прямой сходимости длиною $> 2\pi/\delta$ содержит по меньшей мере одну особую точку функции $f(s)$.

А. Ф. Леонтьев

1621. Класс мероморфных функций, имеющих единичную окружность своей естественной границей. Трон (A class of meromorphic functions having the unit circle as a natural boundary. Thron W. J.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 195—198 (англ.)

Если последовательность целых положительных чисел α_n и последовательность чисел d_n, $d_n \neq 0$, для всех значений $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} |d_n|^{\frac{1}{\alpha_n}} = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \tag{1}$$

то непрерывная дробь

$$1 + \mathop{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n z^{\alpha_n}}{1} \right) \tag{2}$$

сходится к функции $f(z)$, мероморфной в круге $|z| < 1$.

Автор доказывает теорему: если выполнены условия (1) и, кроме того,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{h_n}{h_{n-1}} = \infty, \quad \text{где } h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k,$$

то непрерывная дробь (2) сходится к функции $f(z)$, имеющей окружность $|z| = 1$ своей естественной границей.

С. А. Гельфер

1622. О рядах Дирихле с двумя переменными. Артемиадес (Sur les séries de Dirichlet a deux variables. Artémiadès Nicolas), Bull. sci. math., 1953, **77**, mars-avril, 48—51 (франц.)

Рассматривается вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{m,\,n} |a_{m,\,n}|\, e^{\lambda_m x+\mu_n y},$$

где $\lambda_m > 0$, $\lambda_m \to \infty$, $\mu_n > 0$, $\mu_n \to \infty$, x и y—действительные переменные. Показывается, что при условии

$$\overline{\lim_{m+n\to\infty}} \frac{\ln(m^2+n^2)}{\sqrt{\lambda_m^2+\mu_n^2}} = 0$$

ряд сходится в области Δ, каждая точка (x, y) которой принадлежит всем полуплоскостям

$$\lambda_m x + \mu_n y + \ln|a_{m,\,n}| < 0$$

с достаточно большими $m+n$. Затем находится в полярных координатах уравнение границы области Δ. *А. Ф. Леонтьев*

1623. Условия, необходимые и достаточные, чтобы корни полинома не имели положительных вещественных частей, а кратность нулевых и мнимых корней не превышала заданного числа. Новоселов В. С., Мат. сб., 1953, **33 (75)**, № 1, 215—218

Исследуется случай вырождения условий Гурвица, когда полином имеет простые или кратные нули на мнимой оси. Доказывается следующая лемма: необходимое и достаточное условие того, что все корни полинома $f(z)$ лежат в замкнутой левой полуплоскости и кратность любого корня на мнимой оси не превышает ν, состоит в том, что все корни полинома

$$F_\nu(z;\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) + \cdots + \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} f^\nu(z)$$

при любых достаточно малых положительных ε лежат в левой открытой полуплоскости.

К полиному $F_\nu(z;\varepsilon)$ применимы невырожденные условия Гурвица. Полученный критерий формулируется в терминах положительности определителей Гурвица для полинома $F_\nu(z;\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ и производных по ε от определителей Гурвица при $\varepsilon = 0$.

Непонятно утверждение, что из результатов реферируемой работы следует критерий Гурвица, так как последний лежит в основе результатов работы. *Н. Н. Мейман*

1624. Проблема Рауса — Гурвица для квазиполинома при $s=1$, $r=5$. Цапырин В. Н., Инж. сб., 1953, **15**, 201—206

Элементарными приемами исследуется проблема Рауса — Гурвица для квазиполиномов вида

$$H(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_5 z^5)\operatorname{ch} z + (b_0 + b_1 z + \cdots + b_5 z^5)\operatorname{sh} z$$

(т. е. выводятся неравенства для коэффициентов, при выполнении которых все нули квазиполинома лежат в левой полуплоскости). *Н. Н. Мейман*

1625. К теории однолистных функций. Рахманов Б. Н., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 4, 729—732

Даны определения следующих четырех видов односвязных областей комплексной плоскости w, содержащих точку $w=0$ и не содержащих точки $w=\infty$:

1. Области вида P_α — бесконечные области, через каждую точку границы которых можно провести прямую, не проходящую через другую граничную точку и образующую с положительным направлением вещественной оси один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$.

2. Области вида L^2_α — ограниченные области, симметричные относительно вещественной оси и такие, что каждую их точку, лежащую в верхней полуплоскости, можно соединить с некоторой точкой отрезка вещественной оси, расположенного в области, прямолинейным отрезком, полностью содержащимся в области и образующим с положительным направлением вещественной оси один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$.

3. Области вида $L^2_{\alpha\infty}$ — бесконечные области, симметричные относительно вещественной оси, с границей, пересекающей вещественную ось в точке $-a$ $(a>0)$ и такие, что каждую точку области, лежащую в верхней полуплоскости, можно соединить с некоторой точкой интервала $-a<x<\infty$ вещественной оси прямолинейным отрезком, полностью содержащимся в области и образующим с положительным направлением вещественной оси один и тот же угол α $(0<\alpha<\pi)$.

4. Области вида $L'_{\alpha\infty}$ — бесконечные области, симметричные относительно начала координат, содержащие вещественную ось и такие, что на каждой прямой, пересекающей вещественную ось под одним и тем же углом α $(0<\alpha<\pi)$, находятся только две граничные точки области.

При этом предполагается, что границами всех областей являются замкнутые жордановы кривые.

Определены классы P_α, L^2_α, $L^2_{\alpha\infty}$, $L'_{\alpha\infty}$ функций, непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$ (в случае классов P_α, $L^2_{\alpha\infty}$, $L'_{\alpha\infty}$ — в обобщенном смысле), аналитических в $|z|\leqslant 1$, кроме конечного числа точек окружности $|z|=1$, отображающих эту окружность взаимно однозначно соответственно на границы областей вида P_α, L^2_α, $L^2_{\alpha\infty}$, $L'_{\alpha\infty}$ и нормированных условием наличия неподвижной точки в начале координат и производной в ней, равной единице.

Доказано, что средние арифметические конечного числа функций каждого класса в отдельности (при этом в случае класса P_α слагаемые должны иметь совпадающие полюсы на окружности $|z|=1$) являются функциями, однолистными в круге $|z|<1$ и принадлежащими тому же классу, а средние арифметические, составленные из функций классов L^2_α и $L^2_{\alpha\infty}$, однолистны в $|z|<1$ и принадлежат к классу $L^2_{\alpha\infty}$.

Кроме того, доказано, что если функция

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n z^n$$

однолистна и регулярна в круге $|z|<1$, за исключением простого полюса $z=0$, и отображает этот круг на область, дополнение к которой есть выпуклая область, то функция $\frac{1}{1-e^{i\alpha}}[F(z)+e^{i\alpha}zF'(z)]$, $(0<|\alpha|\leqslant\pi/2)$ однолистна в $|z|<1$, функция $F(z)+zF'(z)$ однолистна и регулярна в $|z|<1$, а функция

$$\frac{F(e^{-i\alpha}z)-F(e^{i\alpha}z)}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}},\quad 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

отображает однолистно круг $|z|<1$ на область с дополнением, звездообразным относительно точки $w=0$. Если же функция $F(z)$ отображает круг $|z|<1$ на область со звездообразным относительно точки $w=0$ дополнением, то функция $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+F(z)\right)$ однолистна в $|z|<1$.

Доказательства основаны на геометрических свойствах рассматриваемых областей, достаточных признаках однолистности (Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950), на одной лемме автора (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 2, 209—211) и одной оценке Г. М. Голузина (Мат. сб., 1938, **3** (**45**), № 2, 321—330).

Г. В. Корицкий

1626. Построение двухрядных решеток по методу годографа скорости. Степанов Г. Ю., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 4, 593—598

Для двухрядных решеток по аналогии с однорядными решетками (Кочин Н. Е., Гидродинамическая теория решеток, Гостехиздат, М.—Л., 1949; Симонов Л. А., Прикл. математика и механика, 1940, **4**, № 4, 97—116) устанавливается топологическая структура годографа вектора скорости, соответствующего полосе периода комплексного потенциала. По заданному годографу скорости и функции, отображающей этот годограф на концентрическое кольцо (в случае безотрывного обтекания) или на единичный круг (при обтекании с отрывом струй), форма профилей, образующих двухрядную решетку, восстанавливается квадратурами в соответствии с известными равенствами.

Г. Н. Положий

1627. Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру. Суворов Г. Д., Мат. сб., 1953, **33** (**75**), № 1, 73—100

Пусть последовательность $B(B_0)=\{B_n\}$ плоских однолистных односвязных ограниченных в совокупности областей B_n сходится в смысле Каратеодори (Каратеодори К., Конформное отображение, ГТТИ, М.— Л., 1934) относительно начала координат к невырожденному ядру B_0. Для перенесения известных исследований Каратеодори по теории простых концов на случай последовательности областей вводятся следующие определения.

Последовательность $\beta(\beta_0)=\{\beta_n\}$ (жордановых) сечений областей B_n лежит над сечением β_0 области B_0, если $\mathrm{lt}\,\beta_n=\beta_0$ и точки $p'\in B_0$, $p''\in B_0$, разделяемые сечением β_0 в B_0, разделяются также сечениями β_n в B_n при всех достаточно больших n. Такая последовательность определяет (с точностью до конечного числа членов, в зависимости от выбора p' и p'') последовательности $b(b_0')=\{b_n'\}$ и $b(b_0'')=\{b_n''\}$ компонент связности $B_n\setminus\beta_n$, содержащих соответственно p' и p''. Эти последовательности называются «элементами», лежащими соответственно над компонентами b_0' и b_0'' связности $B_0\setminus\beta_0$. Цепью элементов называется последовательность $\{b(b_0^k)\}$ элементов, лежащих соответственно над членами цепи (в смысле теории простых концов Каратеодори) подобластей $b_0^1\supset b_0^2\supset\ldots$ ядра B_0. Цепь $\{b(b_0^k)\}$ входит в элемент $a(a_0)$, если для некоторых k_1 и n_1 будет $b_n^{k_1}\subset a_n$ для всех $n\geqslant n_1$, и входит в цепь $\{a(a_0^k)^n\}$, если входит в каждый $a(a_0^k)$. Две цепи, входящие друг в друга, считаются эквивалентными, а класс эквивалентных цепей называется концом последовательности областей $B(B_0)$.

После этого понятие делимости концов и простых концов $B(B_0)$ вводится по Каратеодори. Все основные результаты теории простых концов Каратеодори переносятся на рассматриваемый случай; при этом в классификации простых концов оказывается больше возможностей, так как смежные точки здесь могут быть двух видов. Показано каким образом построение, осуществленное в данной работе, включается в общую топологическую схему введения границы, предложенную референтом (Мат. сб., 1949, **25** (**67**), № 3, 387—414; 1950, **26** (**68**), № 2, 228—236); при этом пополненное пространство оказывается имеющим весьма простую топологическую структуру. В качестве простого приложения развитой теории выводится теорема А. И. Маркушевича (Мат. сб., 1936, **1**(**43**), № 6, 863—886) о равностепенной непрерывности последовательности однолистных функций, а также обратная ей теорема, являющаяся новой. Разобрано большое количество примеров. Ряд полученных результатов можно перенести на случай отображений более общих, чем конформные; см. по этому поводу статьи Лелон-Ферран (Lelong-Ferrand J., J. math. pures et appl., 1951, **21**, № 2, 103—126; № 3, 245—252).

Статья является переработкой кандидатской диссертации.

А. Д. Мышкис

1628. Эффективность суммарного множества базисных множеств полиномов в начале координат. Мейкар, Мейкар (Effectiveness at the origin of the sum set of basic of polynomials. Makar Ragy H., Ma'kar Bushra H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 246—250 (англ.)

Базисное множество полиномов $\{p_n'(z)\}$ называется простым, если степень $p_n(z)$ равна n, «единичным» (monic), если коэффициент при z^n в $p_n(z)$ равен единице, и алгебраическим, если матрица коэффициентов P удовлетворяет алгебраическому уравнению (в случае простого «единичного» базисного множества таким уравнением будет $(P-I)^m=0$, I — единичная матрица).

Доказана теорема:

Если $\{p_n(z)\}$, $\{q_n(z)\}$, ..., $\{t_n(z)\}$ — простые «единичные» базисные множества полиномов, эффективные в точке $z=0$, и «суммарное» множество

$$\{u_n(z)\}=\frac{1}{\lambda+\mu+\ldots+\gamma}[\lambda\{p_n(z)\}+\mu\{q_n(z)\}+\ldots+\gamma\{t_n(z)\}],\qquad \lambda+\mu+\ldots+\gamma\neq 0,$$

является алгебраическим, то $\{u_n(z)\}$ эффективно в $z=0$. *С. Я. Хавинсон*

1629. О полноте систем аналитических функций. Мергелян С. Н., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 4(56), 3—63

Реферируемая статья является обзором результатов, полученных за последние годы в следующих трех направлениях (каждому из них посвящена отдельная глава):

1. Критерии полноты системы многочленов в некоторой области (в смысле среднего квадратического по ее площади) в зависимости от топологических и метрических свойств этой области.

2. Вопросы полноты системы многочленов в конечных областях (более или менее правильных) при наличии некоторой весовой функции.

3. Вопросы полноты системы многочленов в бесконечных областях (как с весом, так и без него).

В начале первой главы автор доказывает результат А. И. Маркушевича о полноте системы многочленов в областях типа Каратеодори (областью типа Каратеодори называют область G, полная граница которой совпадает с полной границей области G_∞ — той из областей, дополнительных к G относительно всей плоскости, которая содержит точку $z=\infty$) и разбирает ряд примеров некаратеодориевых областей, подтверждающих предположение, что класс областей типа Каратеодори является единственным классом областей, в которых полнота системы многочленов может быть доказана, исходя лишь из топологической характеристики, независимо от их метрических свойств.

Далее приводятся результаты А. Л. Шагиняна о нормальности семейств аналитических функций, ограниченных в среднем по площади области, и отмечается связь этих результатов с вопросами полноты.

В заключение главы приводится следующий критерий полноты системы многочленов, принадлежащий М. В. Келдышу и публикуемый впервые:

Пусть ограниченная область D такова, что система всех рациональных функций с полюсами вне $\overline{D}$ полна в D (в смысле среднего квадратического). Обозначим через S окружность с центром в начале координат, внутри которой лежит $\overline{D}$. Тогда система многочленов полна в области D (в смысле среднего квадратического), если для любого положительного ε и для любой точки a, не принадлежащей $\overline{D}$, существуют спрямляемая кривая L, соединяющая a с S ($z=z(s)$, $z(0)=a$, s — длина дуги L от a до $z(s)$), и ее окрестность G такие, что если $\rho(s)$ означает расстояние от $z(s)$ до границы G, а $\sigma(s)$ — площадь той части области D, которая попадает в область R_s, составленную из кругов

$$|z-z(t)|\leqslant\rho(t),\quad 0\leqslant t\leqslant l,$$

то

$$\left|\int_0^l \exp\left[e^{2c\int_0^s \frac{dt}{\rho(t)}}\right] d\sigma(s)\right|<\varepsilon.$$

Во второй главе вначале приводятся простейшие результаты, дающие достаточные критерии для случая приближений с весом, равным квадрату модуля аналитической функции. В основной части главы изложены доказательства результатов М. В. Келдыша о полноте с весом в произвольных конечных односвязных областях и результатов М. М. Джрбашяна, получившего очень точный критерий полноты для случая, когда областью является круг с разрезом по радиусу, а весовая функция зависит лишь от угла. Как обобщение последнего результата приводится также теорема о весовой полноте системы $\{z^{\lambda_n}\}$ (λ_n — нецелые) в круге с радиальным разрезом.

В третьей главе после ряда примеров, иллюстрирующих случаи полноты и неполноты в неограниченных областях, приводятся результаты М. М. Джрбашяна (впервые публикуемые подробно), из которых приведем следующие два критерия полноты без веса в неограниченных областях:

1. Обозначим через $\sigma(R)$ линейную меру пересечения окружности $|z|=R$ с областью D. Если область D удовлетворяет условиям: а) в дополнении к $\overline{D}$ относительно всей плоскости содержится угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{2}<\alpha<\infty\right)$, б) полуось $0\leqslant x<\infty$ можно разбить на сумму двух множеств E_1 и E_2 таких, что $\sigma(R)<e^{-h(R)}$ при $R\in E_1$, а мера пересечения множества E_2 с интервалом (R,∞) не превосходит $e^{-h(R)}$, в) $\int_1^\infty h(t)\,t^{-1-\alpha}\,dt=\infty$, то система многочленов полна в области D.

2. Пусть область D заключена в полосе $|\operatorname{Im} z|<d$ и топологически эквивалентна ей, а $S(r)$ означает линейную меру пересечения окружности $|z|=r$ с областью D. Если возрастающая функция $h(r)$ такова, что $rh'(r)$ монотонно стремится к бесконечности и

$$\int_1^\infty h(r)\,r^{-2}dr=\infty,$$

то из неравенства $S(r)<e^{-h(r)}$ следует полнота системы многочленов в области D.

Отмечается также, что эти достаточные критерии являются в некоторой степени и необходимыми. Кроме того, приводятся результаты, принадлежащие М. М. Джрбашяну и А. Л. Шагиняну, относительно полноты системы многочленов с весом $p(|z|)$ в области $|\arg z|<\alpha$. В конце главы рассматриваются также результаты, относящиеся к вопросам приближения непрерывных функций на жордановых кривых. *М. А. Евграфов*

1630. Разложение на простейшие дроби и разложение на множители функций на замкнутых римановых поверхностях. Тиц (Tietz Horst), Math. Nachr., 1953, 4, № 1, 31—38 (Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. (нем.)

В основе работы лежит следующее распространение теоремы Рунге: пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая риманова поверхность, $\mathfrak{b}$ — ее точка, C — замкнутая кривая, которую можно стянуть в $\mathfrak{b}$, G и $\overline{G}$ — области, ограниченные C, причем $\mathfrak{b}\in\overline{G}$. Каждая функция f, однозначная и регулярная на $G+C$, может быть представлена рядом $\sum a_n e_n$, где e_n однознач-

ны на $\mathfrak{A}$ и регулярны всюду, кроме полюса в $\mathfrak{b}$, причем ряд сходится равномерно на $G + C$.

При помощи этой теоремы получается обобщение теоремы Миттаг-Леффлера. Пусть $\mathfrak{r}_n$ — последовательность точек $\mathfrak{A}$, имеющих единственную предельную точку $\mathfrak{b}$, и f—функция, имеющая в $\mathfrak{r}_n$ главные части X_n, а во всех других точках $\mathfrak{A}$, кроме $\mathfrak{b}$, регулярная. Существуют такие функции d_n, регулярные и однозначные на $\mathfrak{A}$, кроме полюса в $\mathfrak{b}$, и такая функция g, регулярная и однозначная всюду на $\mathfrak{A}$, кроме $\mathfrak{b}$, что

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - d_n)$$

для всех точек $\mathfrak{A}$, кроме $\mathfrak{r}_n$ и $\mathfrak{b}$.

Пусть $\Omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{r})$—абелев интеграл III рода, имеющий в точках $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{b}$ полюсы I-го порядка с вычетами $+1$ и -1 и $E(\mathfrak{z}, \mathfrak{r}) = e^{\Omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{r})}$. Доказывается следующее обобщение теоремы Вейерштрасса: если $g(\mathfrak{z})$ регулярна и однозначна во всех точках $\mathfrak{A}$, кроме $\mathfrak{b}$, и имеет нули в точках $\mathfrak{r}_n$, то существуют такие функции $d_n(\mathfrak{z})$, регулярные и однозначные на $\mathfrak{A}$, кроме полюса в $\mathfrak{b}$, такая функция $\gamma(\mathfrak{z})$, регулярная всюду на $\mathfrak{A}$, кроме $\mathfrak{b}$, и такой абелев интеграл II рода $I(z)$ с единственным полюсом в $\mathfrak{b}$ и целочисленными периодами, что

$$g(\mathfrak{z}) = \exp[\gamma(\mathfrak{z}) + 2\pi i I(\mathfrak{z})] \prod_{n=1}^{\infty} E(\mathfrak{z}, \mathfrak{r}_n) \exp(-d_n(\mathfrak{r})).$$

И. Р. Шафаревич

1631. Теорема типа Грина для функций двух комплексных переменных. Бергман (A theorem of Green's type for functions of two complex variables. Bergman Stefan), Proc. Amer. Maht. Soc., 1953, 4, № 1, 102—109 (англ.)

Пусть $h(\zeta_1, \zeta_2) = h^1 + ih^2$ — аналитическая функция двух комплексных переменных $\zeta_k = \rho_k e^{i\lambda_k}$, $k = 1, 2$, в области $[1 - \varepsilon < \rho_1 < 1 + \varepsilon, \ \rho_2 \leqslant 1]$, являющаяся однозначной и однолистной функцией от ζ_1 в области $1 - \varepsilon < \rho_1 < 1 + \varepsilon$ для всякого фиксированного ζ_2, и $p(\zeta_2^0)$, $|\zeta_2^0| \leqslant 1$, — замкнутая кривая $[z_1 = h(e^{i\lambda_1}, \zeta_2^0), \ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 2\pi, \ z_2 = \zeta_2^0]$, расположенная в плоскости $z_2 = \zeta_2^0$ пространства двух комплексных переменных z_1, z_2. Обозначим через $P(\zeta_2^0)$ область, лежащую внутри кривой $p(\zeta_2^0)$ в плоскости $z_2 = \zeta_2^0$. Область D пространства переменных z_1, z_2, рассматриваемая автором в настоящей работе, определяется следующим образом:

$$D = \sum_{|\zeta_2| \leqslant 1} P(\zeta_2).$$

Граница этой области состоит из двух частей аналитических гиперповерхностей

$$c = \sum_{0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 2\pi} P(e^{i\lambda_2}), \qquad d = \sum_{|\zeta_2| \leqslant 1} p(\zeta_2).$$

Функция $H(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv H(z_1, z_2)$, определенная в области D, принадлежит, согласно определению автора, классу $E(D)$, если она удовлетворяет двум условиям:

1. Для каждого фиксированного z_2^0, $|z_2^0| \leqslant 1$, $H(z_1, z_2^0)$ — гармоническая функция переменных x_1, x_2 ($z_1 = x_1 + ix_2$) в области $P(\zeta_2^0)$, непрерывно дифференцируемая в $\overline{P}(\zeta_2^0)$, $z_2^0 = \zeta_2^0$, $\overline{P} = P + p$;

2. Для каждого фиксированного ζ_1, $|\zeta_1| = 1$, $H(z_1, z_2) = H[h(\zeta_1, \zeta_2), \zeta_2]$ — гармоническая функция переменных ξ_3, ξ_4 ($\zeta_2 = \xi_3 + i\xi_4$) при $|\zeta_2| < 1$ и непрерывно дифференцируемая в области $|\zeta_2| \leqslant 1$.

Автор вводит обозначения:

$$(Q(z_1\ z_2))^{\bullet} \equiv Q(h(\zeta_1, \zeta_2), \zeta_2),$$

$$G^{(\nu)}(\zeta_1, \zeta_2) = (H^{(\nu)}(z_1, z_2))^{\bullet}, \quad \nu = 1, 2,$$

$$L_k^{(\nu)}(\zeta_1, \zeta_2) = \left(\frac{\partial H^{(\nu)}(z_1, z_2)}{\partial x_k}\right)^{\bullet}, \quad \nu = 1, 2; \quad k = 1, 2,$$

$$S(G^{(\nu)}) = G^{(\nu)} - \sum_{k=1}^{2} L_k^{(\nu)} h^{(k)}, \qquad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \frac{\partial}{\partial \xi_4}\right),$$

$$F(H^{(1)}, H^{(2)}; D) =$$

$$= \iiiint_D \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=3}^{4} \left(\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial x_k \partial x_m}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4,$$

$$T(H^{(1)}, H^{(2)}; d) =$$

$$= -\int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \iint_B \left[\left(\nabla G^{(1)} - \sum_{k=1}^{2} L_k^{(1)} \nabla h^{(k)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\sum_{\nu=1}^{2} (h^{(\nu)} \nabla L_{\nu}^{(2)})\right) + \sum_{k=1}^{2} (\nabla h^{(k)} \nabla L_k^{(1)}) \frac{\partial S(G^{(2)})}{\partial \rho_1}\right] \times$$

$$\times\, d\lambda_1\, d\omega_2, \quad d\omega_2 = d\xi_3\, d\xi_4,$$

$$t(H^{(1)}, H^{(2)}; d) =$$

$$= -\int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \iint_B \left[S(G^{(1)}) \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\sum_{\nu=1}^{2} \nabla L_{\nu}^{(2)} \nabla h^{(\nu)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2} h^{(k)} \nabla L_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\nabla G^{(2)} - \sum_{\nu=1}^{2} L_{\nu}^{(2)} \nabla h^{(\nu)}\right)\right] d\lambda_1\, d\omega_2,$$

$$D(H^{(1)}, H^{(2)}; S) = \int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \int_{\lambda_2=0}^{2\pi} \left(\frac{\partial G^{(1)}}{\partial \rho_2} - \sum_{k=1}^{2} L_k^{(1)} \frac{\partial h^{(k)}}{\partial \rho_2}\right) \times$$

$$\times \frac{\partial S(G^{(2)})}{\partial \rho_1}\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

$$d(H^{(1)}, H^{(2)}; S) = \int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \int_{\lambda_2=0}^{2\pi} S(G^{(1)}) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left[\frac{\partial G^{(2)}}{\partial \rho_2} - \sum_{\nu=1}^{2} L_{\nu}^{(2)} \frac{\partial h^{(\nu)}}{\partial \rho_2}\right] d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

где $B=[|z_2|<1]$, $H^{(\nu)}$, $\nu=1, 2$, — функции класса $E(D)$, и доказывает теорему (типа Грина):

Если $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ — функции класса $E(D)$, то

$$F(H^{(1)}, H^{(2)}; D)=D(H^{(1)}, H^{(2)}; S)+$$
$$+T(H^{(1)}, H^{(2)}; d)=d(H^{(1)}, H^{(2)}; S)+$$
$$+t(H^{(1)}, H^{(2)}; d).$$

В качестве приложения этой теоремы устанавливается следующая лемма:

Пусть функция

$$f=\sum_{m,\,n=1}^{\infty} a_{mn}z_1^m z_2^n$$

двух комплексных переменных регулярна в замкнутой области D и пусть круговая область Рейнхардта

$$R[|z_1|^2<K(|z_2|^2),\ |z_2|^2<\alpha^2]$$

лежит внутри этой области. Тогда

$$T(H, H; d)+D(H, H; S)\geqslant$$
$$\geqslant 2\pi^2\sum_{m,\,n=0}^{\infty}(m+1)(n+1)^2|a_{m+1,\,n+1}|^2\times$$
$$\times\int_{\tau=0}^{\alpha}\tau^{2n}[K(\tau^2)]^{m+1}d(\tau^2).$$

А. А. Темляков

1632. Аналитические функции многих комплексных переменных. Одзаки, Оно (Analytic functions of several complex variables. Ozaki Shigeo, Onô Isao), Scient. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1953, A4, № 98—103, 262—270 (англ.)

Изучаются системы аналитических функций многих комплексных переменных при помощи вводимого авторами понятия «функционального вектора» (function vector).

Рассматривая систему аналитических функций $w_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $w_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots,$ $w_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ от n комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, авторы обозначают эти функции и переменные как векторы:

$$z\equiv\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},\qquad w(z)\equiv\begin{pmatrix}w_1(z)\\w_2(z)\\\vdots\\w_n(z)\end{pmatrix}$$

и определяют степени вектора z и производные функционального вектора $w(z)$ следующим образом:

$$z^k\equiv\begin{pmatrix}z_1^k\\\vdots\\\sqrt{\dfrac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}}\cdot z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}\\\vdots\\z_n^k\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{z^k}\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{1}{z_1^k}\\\vdots\\\sqrt{\dfrac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}}\cdot\dfrac{1}{z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n}}\\\vdots\\\dfrac{1}{z_n^k}\end{pmatrix},$$

$$\frac{d^k w(z)}{dz^k}\equiv\left(\sqrt{\frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}}\cdot\frac{\partial^k w_i(z)}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}}\right)\equiv$$
$$\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^k w_1}{\partial z_1^k}, & \sqrt{k}\,\dfrac{\partial^k w_1}{\partial z_1^{k-1}\partial z_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^k w_1}{\partial z_n^k}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\dfrac{\partial^k w_n}{\partial z_1^k}, & \sqrt{k}\,\dfrac{\partial^k w_n}{\partial z_1^{k-1}\partial z_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^k w_n}{\partial z_n^k}\end{pmatrix},$$

где k — произвольное целое положительное число и

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=k.$$

Принимая функциональный вектор $w(z)$ за функцию, авторы устанавливают ряд фундаментальных теорем теории функций, как, например, интегральную формулу Коши для функционального вектора и его производных, теорему Лиувилля, возможность разложения в ряды Тейлора и Лорана.

Приведем здесь только теорему, дающую разложение функционального вектора $w(z)$ в ряд Лорана:

Если функциональный вектор $w(z)$ регулярен в кольце $r_i<|z_i|<R_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и непрерывен на его границе, то существует следующее разложение:

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_i|=R_i}\cdots\int w(\zeta)\times$$
$$\times\left[\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{\zeta-z}\right]_{z=0}df_\zeta\cdot z^k+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_i|=r_i}\cdots\int w(\zeta)\times$$
$$\times\left(0,\ldots,\sqrt{\frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}}\,\alpha_1!\ldots\alpha_n!\,\zeta_1^{\alpha_1-1}\ldots\zeta_n^{\alpha_n-1},\ldots,0\right)\cdot$$
$$\cdot df_\zeta\frac{1}{z^k},$$

где

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)},\quad df_\zeta=d\zeta_1 d\zeta_2\ldots d\zeta_n.$$

Символ $\times$ обозначает прямое произведение матриц.

При этом доказывается, что дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ может быть разложена в ряды:

$$\frac{1}{\zeta} + \left[\frac{d}{dz}\frac{1}{\zeta - z}\right]_{z=0} z + \cdots + \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{\zeta - z}\right]_{z=0} z^k + \cdots$$

для $|z_i| < |\zeta_i|$ и

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \times$$

$$\times \left(0, \ldots, \sqrt{\frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}}\alpha_1! \ldots \alpha_n! \zeta_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \zeta_n^{\alpha_n - 1}, \ldots, 0\right) \cdot \frac{1}{z^k}$$

для $|z_i| > |\zeta_i|$. *А. В. Лебедев*

1633 РЕЦ. Построение и приложения конформных отображений. Бекенбах (Construction and applications of conformal maps. Beckenbach E. F., pp. 280, diagrs, Washington, 1952, 2.25 doll.) [**Рецензия: Зейдель** (Seidel W.), Aeronautical Engng Rev., 1953, **12**, № 6, 123—124 (англ.)]

1634 Д. О некоторых вопросах полноты системы $\{f(\lambda_n z)\}$. Волохин А. В. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Горьковский гос. ун-т, Горький, 1953

См. также: 1518, 1519, 1604, 1637, 1664, 1691, 1701 **РЕЦ**, 1718; РЖМех 1953, 228, 229, 277, 289

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1635. Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при помощи импульсивных составляющих. Данкан (Solution of ordinary linear differential equations with variable coefficients by impulsive admittances. Duncan W. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 1, 122—127 (англ.)

Автор излагает известный метод Коши отыскания частного решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрено применение этого метода для системы линейных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производных, для системы уравнений второго порядка, затем и n-го порядка, неразрешенных относительно старших производных.

М. Р. Шура-Бура

1636. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с полиномиальными решениями. Чаунди (Second-order linear differential equations with polynomial solutions. Chaundy T. W.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 14, 81—95 (англ.)

Дополнения и исправления к статье автора (Quart. J. Math., 1949, **20**, 105—120), посвященной задаче Сойера (Sawyer W. W., там же, 22—30) об исследовании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$(F - \lambda G)\, Y = 0, \qquad (1)$$

имеющих полиномиальные решения любой целой неотрицательной степени при соответствующем подборе параметра λ; здесь

$$F \equiv \sum_{r=0}^{p} x^r \sum_{j=0}^{2} f_{rj} \left(x \cdot \frac{d}{dx}\right)^j,$$

$$G \equiv \sum_{r=0}^{p} x^r \sum_{j=0}^{2} g_{rj} \left(x \cdot \frac{d}{dx}\right)^j$$

(f_{rj} и g_{rj} — постоянные числа, p называется рангом уравнения). Исследование проводится различным образом в зависимости от количества целых неотрицательных решений уравнения

$$g_{00} + g_{01} S + g_{02} S^2 = 0. \qquad (2)$$

Если таких решений нет или оно одно, то уравнение (1) приводится (в соответствующем смысле) к уравнению ранга соответственно 0 или 1. Если же таких решений два и ранг уравнения (1) равен двум, то задача сводится к случаю, когда $g_{00} = f_{00} = 0$, $g_{01} = f_{01} = -m$, $g_{02} = f_{02} = 1$ (m — натуральное). В этом случае доказывается, что если уравнение (1) имеет полиномиальные решения Y_n любой степени $n \leqslant m$, причем $Y_m \not\equiv x^m$, то оно имеет и полиномиальные решения любой степени $n > m$, а при произвольных λ имеет два независимых решения в виде ряда по целым неотрицательным степеням x.

Изучается также более детально строение операторов F и G для уравнений (1), решающих задачу Сойера. Исследование уравнений ранга более двух в случае двух целых неотрицательных решений уравнения (2) только намечается. Автор полагает, что предлагаемый им метод можно применить и для уравнений порядка выше двух. В заключение дается ответ на один вопрос Берчнелла (Burchnell) о ранге уравнений. *А. Д. Мышкис*

1637. О последовательностях многочленов, связанных с дифференциальными уравнениями. Сойер (On polynomial sequences connected with differential equations. Sawyer Walter Warwick), Math. Nachr., 1953, **9**, № 5, 269—280 (англ.)

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса

(в комплексной области) E_0. Строится бесконечная последовательность уравнений E_n того же класса, имеющих ту же группу монодромии и те же особые точки, что и E_0; при этом степени коэффициентов строящихся уравнений ограничены в совокупности. Если y_n — решение E_n, а y_0 — соответствующее решение E_0, то имеет место соотношение $y_n = (p_n y_0 + S q_n y_0')/N$, где N и S — многочлены, причем уравнение $N = 0$ дает все кажущиеся особенности E_0, а $S = 0$ — действительные особенности E_0, отличные от ∞. Дроби p_n/q_n являются подходящими некоторой цепной дроби, так что многочлены p_n и q_n, а потому и решения y_n удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям. Эти рассмотрения тесно связаны с исследованиями Хана (Hahn W., Math. Nachr., 1950, 4, 1—11).

Исследуются кажущиеся особенности E_n, причем для простого нахождения их предлагается также метод, являющийся развитием идей Лагерра (Laguerre E., Bull. Soc. math. France, 1877, 5, 78—92). Построение подходящих дробей связано с изучаемой в работе задачей, имеющей самостоятельный интерес: пусть даны формальные степенные ряды

$$P_i(x-a_i) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x-a_i)^j \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

$$P(1/x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j}$$

(причем $a_{i0} \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, $a_0 \neq 0$), целое число t и целые неотрицательные числа f_i и F; требуется для заданного целого неотрицательного n построить многочлен q_n степени $\leqslant n$ и многочлен p_n степени $\leqslant n+t$, для которых формальное разложение $p_n - q_n P_i(x-a_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ (соответственно, $p_n - q_n x^t P(1/x)$) по степеням $(x-a_i)$ (соответственно, $1/x$) не содержит членов младше $(x-a_i)^{f_i}$ (соответственно, x^{n+t-F}).

Изложение подробное, но местами недостаточно ясное. Опечатки: на стр. 270, 2-я строка снизу, должно быть $O(x^{n+t-F})$ вместо $O(x^{t-F})$; на стр. 271 вместо $f_j(0)$ и $F(0)$ должно быть соответственно f_j и F; имеются и более мелкие опечатки. *А. Д. Мышкис*

1638. Линейные дифференциальные уравнения с малыми возмущениями. Т а м Ц о й-т а к (Linear differential equations with small perturbations. T a a m C h o y - t a k), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 13—25 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

в котором $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — комплексные функции действительной переменной x, определенные для всех $x \geqslant 1$, причем $[p(x)]^{-1}$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат к $L(1, R)$ для сколь угодно большого R. Исследуется асимптотическое поведение решений уравнения (1) при $x \to \infty$.

Основные результаты, полученные в работе, следующие:

Пусть $y(x)$ есть любое решение уравнения (1) и пусть $g(x)$ — вещественная функция, имеющая положительную нижнюю границу в $1 \leqslant x < \infty$. Кроме того, пусть a — постоянная.

1. Если $\int_1^x |p(x)|^{-1}\,dt = O(g(x))$ и если $g(x)$ $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат к $L(1, \infty)$, тогда

$$y(x) = O(g(x))$$

и $p(x)y'(x)$ стремится к пределу при $x \to \infty$.

2. Если $p(x)^{-1} = a$, $xq(x)$ и $xf(x)$ принадлежат к $L(1, \infty)$, тогда

$$y(x) = O(x)$$

и для всякой постоянной C имеется решение $y^*(x)$ уравнения, которое может быть записано в форме

$$y^*(x) = C + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

3. Если $p(x)^{-1} = a$, $x^2 q(x)$ и $xf(x)$ принадлежат к $L(1, \infty)$, тогда существуют постоянные A и B такие, что

$$y(x) = Ax + B + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

4. Если $p(x)^{-1}$, $q(x)$ и $f(x)$ принадлежат к $L(1, \infty)$, тогда существует такая постоянная C что

$$y(x) = C + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Аналогичные критерии устанавливаются далее для уравнения третьего порядка вида

$$(p(x)y'')' + q(x)y' + r(x)y = f(x),$$

а также для некоторых комплексных областей изменения независимой переменной. В последнем случае предполагается, что коэффициенты уравнения (1) есть аналитические функции.

Автор утверждает, что установленные результаты могут быть распространены и на линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, однако это приводит к громоздким выкладкам.

В. П. Басов

1639. Асимптотические свойства решений уравнения Риккати типа $y' + y^2 = A(x)$. Ш а й к и н (Despre apropierea asimptotică a soluţiilor ecuaţiei Riccati de tipul $y' + y^2 = A(x)$. Ş a i c h i n A.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 195—201 (рум.)

Дается новое изложение и некоторые переделки части теорем, опубликованных И. М. Соболем (Уч. зап. МГУ, 1952, № 155, 195—205). В частности, установлена теорема: если уравнение Риккати имеет два неограниченно сближающихся продолжаемых решения, то все остальные решения, кроме, быть может, одного, асимптотически между собой сближаются. *В. В. Немыцкий*

1640. О самосопряженном дифференциальном уравнении второго порядка. Л и н д П о т т е р (On self-adjoint differential equations of second order. L i n d P o t t e r R u t h), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 467—491 (англ.)

Рассматривая дифференциальное уравнение вида

$$[r(x)\,y']' + p(x)\,y = 0 \qquad (r(x) > 0,\ r,\ p \text{ непрерывны при } x > 0), \tag{1}$$

автор изучает следующие три вопроса: 1) существование колебательных решений; 2) число нулей решений в интервале (a, x); 3) ограниченность неколебательных решений при $x \to \infty$.

Колебательными называются решения уравнения (1), имеющие бесконечное число нулей.

Доказывается:

если

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{dx}{r(x)} = \infty$$

и

$$\lim_{x\to\infty} r(x)\,\frac{d}{dx}\,[r(x)\,p(x)]^{-1/2} = L,$$

то решения уравнения (1) при $L < 2$ будут колебательными, а при $L > 2$ — неколебательными.

В другой аналогичной теореме первое условие заменено условием

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x p(x)\,dx = \infty.$$

Для случая $L = 2$ приводятся примеры, иллюстрирующие возможность как колебательных, так и неколебательных решений.

В своем доказательстве автор опирается на теоремы Штурма (Sturm C., J. math. pures et appl., 1836, 1, 106—186) и Лейтона (Leighton W., J. London Math. Soc., 1952, 27, 37—47).

Обозначив через $N(a, x)$ число нулей решения уравнения (1) в интервале (a, x), автор дает асимптотическую формулу

$$N(a, x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{p(x)\,r^{-1}(x)}\,dx,$$

являющуюся обобщением известной формулы Вимана (Wiman A., Arkiv math., astr., fysik, 1917, 12, № 14, 1—22).

Справедливость формулы доказывается при условиях:

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{dx}{r(x)} = \infty \text{ или } \lim_{x\to\infty} \int_a^x p(x)\,dx = \infty$$

и, кроме того,

$$\lim_{x\to\infty} r(x)\,\frac{d}{dx}\,[r(x)\,p(x)]^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Относительно третьего вопроса в статье доказывается:

1) Пусть все решения уравнения (1) неколебательны. Тогда, для того чтобы все решения уравнения (1) были ограничены при $x \to \infty$, необходимо и достаточно

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{dx}{r(x)} < \infty.$$

2) Решения уравнения (1) будут неколебательными и ограниченными при $x \to \infty$, если $r(x)p(x)$ — монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x r^{-1}(x)\,dx < \infty,$$

или $r(x)\,p(x)$ — монотонно возрастающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x p(x)\,dx < \infty.$$

М. И. Альмухамедов

1641. Об обобщенном уравнении Льенара. Манареси (Sull' equazione di Liénard generalizzata. Manaresi Gabriella), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 1, 59—64 (итал.)

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \varepsilon \frac{g'(x)}{2} + \mu f(x) \cdot \dot{x} = 0,$$

в котором x — искомая функция, $f(x)$ и $g'(x)$ — непрерывные функции, нелинейные относительно x; ω, ε, μ — константы, причем ε и μ — величины малые. Решение уравнения ищется при помощи асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

Автор получает первое приближение, производит подробный анализ, находит формулу, определяющую период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon}{c\omega^3} \int_0^{2\pi} \frac{g'(a\cos\theta)}{2} \cos\theta\,d\theta.$$

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрено уравнение колебаний маятника в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \frac{\omega^2 x^3}{6} + 2p\dot{x} = 0.$$

Этот же пример подробно рассмотрен рядом авторов (см., например, Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Киев, 1937).

Показано, что период колебаний будет

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{c^2}{16}\right),$$

где c — амплитуда колебаний.

Ю. А. Митропольский

1642. Субгармонические колебания в нелинейных системах. Хаяси (Subharmonic oscillations in nonlinear systems. Hayashi Chihiro), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 5, 521—529 (англ.)

Исследуется вопрос о субгармонических колебаниях порядка $1/\nu$ в нелинейной системе, описываемой уравнением

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + 2\delta\frac{dv}{d\tau} + f(v) = B\cos\nu\tau, \tag{1}$$

где δ и B — постоянные, а $f(v)$ — многочлен. Предполагая, что искомое колебание имеет вид

$$v = v_0 + x \sin \tau + y \cos \tau + w \cos \nu\tau,$$

автор определяет неизвестные амплитуды, приравнивая коэффициенты при основных гармониках в обеих частях уравнения (1). Рассматриваются различные частные случаи и исследуется также устойчивость колебаний. Если $f(v) = c_0 + c_1 v + \ldots + c_\nu v^\nu + \ldots$, то условия $c_\nu \neq 0$ достаточно для наличия субгармонических колебаний порядка $1/\nu$. Однако доказательство этого утверждения дается лишь в частных случаях. На примере устанавливается, что условие $c_\nu \neq 0$ не является необходимым для возникновения субгармонических колебаний порядка $1/\nu$.

Необходимо отметить, что применяемые автором методы широко известны и рассматриваемая им задача имеет большую литературу, на что, однако, в работе содержится мало указаний.

И. Г. Малкин

1643. Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования. Ершов Б. А., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 1, 61—72

Исследуются при помощи качественного метода, предложенного Н. П. Еругиным (Прикл. математика и механика, 1950, **14**, № 5), движения, описываемые уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \quad (\sigma = c_1 x - d_1 y), \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ — непрерывная функция, имеющая частные производные по x и y, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y} < 0, \quad F(0, 0) = 0; \qquad (2)$$

функция f — непрерывная, удовлетворяющая условиям:

$$\sigma f(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0, \qquad (3)$$

$$f(0) = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \geqslant 0 \text{ при всех } \sigma \qquad (5)$$

(в последнем условии допускается только нетождественное равенство нулю); c_1 и d_1 — положительные постоянные.

Доказывается, что при условиях (2) — (5) все движения, определяемые уравнениями (1), в случае $\partial F/\partial x < 0$ и в случае $\partial F/\partial x = 0$ обладают свойством $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to \infty$. При некоторых дополнительных условиях указанным свойством обладают также все решения системы (1) и в случае $\partial F/\partial x > 0$.

Во всех рассмотренных случаях выяснена качественная картина поведения интегральных кривых системы (1).

В. В. Румянцев

1644. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем. Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 5, 999—1002

Рассматриваются две системы линейных уравнений

$$z' = A(t)\, z, \qquad (1)$$

$$z' = [A(t) + \varepsilon B(t)]\, z, \qquad (2)$$

где матрицы $A(t)$ и $B(t)$ ограничены, непрерывны (или кусочно непрерывны) и система (1) правильна в смысле Ляпунова. Ставится вопрос, будут ли характеристические показатели системы (1) всегда устойчивы, т. е. будут ли характеристические показатели системы (2) сколь угодно мало отличаться от характеристических показателей системы (1), если постоянная ε численно достаточно мала. Отрицательный ответ дается следующей теоремой.

Теорема. Существуют такие матрицы $A(t)$ и $B(t)$, что: а) их коэффициенты суть ограниченные, голоморфные на полуоси $0 < t < \infty$ функции и обладают слабой вариацией в смысле Персидского; б) выполняются условия $|B(t)| \to 0$ и $\int_0^\infty |B(t)|\, dt < \infty$; в) система (1) правильна и имеет отрицательные характеристические показатели, так что все ее решения асимптотически устойчивы; г) при любом $\varepsilon > 0$ среди решений (2) имеются такие, характеристический показатель которых $\geqslant c_0 > 0$; в частности, решения (2) заведомо неустойчивы.

Для доказательства теоремы рассматривается система второго порядка, для которой

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 - 6\pi \sin \pi\sqrt{t} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\sqrt{t}} \\ e^{-\sqrt{t}} & 0 \end{pmatrix},$$

и показывается, что она удовлетворяет всем требованиям теоремы. Доказанная теорема усиливает результат, полученный автором в другой его работе (РЖМат, 1953, 227).

И. Г. Малкин

1645. Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений. Зубов В. И., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 4, 506—508

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{ki}(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводится матрица $A = \{f_{ki}\}$ и транспонированная матрица A^*. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения $|B - \lambda E| = 0$, где $B = {}^1/_2 (A + A^*)$.

Теорема 1. Если $\lambda_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ в некоторой области D, содержащей начало координат, то тривиальное решение устойчиво по Ляпунову.

Как метод доказательства, так и следствия вполне аналогичны результатам работы Важевского (Ważewski T., Studia math., 1948, **10**, 48—59). Далее рассматривается матрица $C = \{C_{ki}\}$, где $C_{ki} = \lim_{t \to \infty} f_{ki}(t, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 2. Если $f_{ki}(t, x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны при $t = \infty$, $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и корни ν_i уравнения $|C - \nu E| = 0$ имеют отрицательные вещественные части, то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

При попытке распространить теорему 1 на более общие уравнения допущена ошибка. Однако результаты автора останутся справедливыми, если предположение $\lambda_i \leqslant 0$ заменить предположением $\lambda_i \leqslant -a < 0$. *И. Г. Малкин*

1646. Качественная теория дифференциальных уравнений. Халанай (Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Halanay A.), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 193—194 (рум.)

Кратко характеризуются проблемы качественной теории дифференциальных уравнений и указывается на роль русских и советских ученых в развитии этой теории. *В. В. Немыцкий*

1647. Разложение интегрируемой функции по главным функциям граничной задачи обыкновенного дифференциального уравнения. Расулов М. Л., Изв. АН Азерб. ССР, 1953, № 6, 3—28 (русск.; резюме азерб.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x, \lambda)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + P_n(x, \lambda)\, y = f(x). \qquad (1)$$

Переменная x изменяется на отрезке $[a, b]$, который разбит на m интервалов точками деления $a_0 = a,\ a_1, \ldots, a_m = b$. На каждом частичном интервале все коэффициенты $P_i(x, \lambda)$ при любом фиксированном λ из некоторой замкнутой области D_0 предполагаются непрерывными функциями x.

Для однородного уравнения, отвечающего уравнению (1), ставится обычная краевая задача при линейно независимых (для $\lambda \subset D_0$) граничных условиях, учитывающих разбиение основного отрезка $[a, b]$ на частичные интервалы. Строится функция Грина данной граничной задачи и при помощи этой функции решение уравнения (1) на всем отрезке $[a, b]$ представляется в форме

$$y(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Предполагая, что все коэффициенты уравнения (1) являются аналитическими функциями λ в замкнутой области D_0, автор отмечает, что построенная в работе функция Грина является мероморфной функцией λ в D_0, и находит главную часть этой функции в окрестности полюсов.

Дальнейшее исследование функции Грина проводится в предположении, что коэффициенты уравнения (1), будучи кусочно-непрерывными функциями x на $[a, b]$, удовлетворяют условиям, аналогичным условиям теоремы Тамаркина (Tamarkin J., Math. Z., 1927, 27, 1—54). Однако условия автора являются более общими, так как в упомянутой работе коэффициенты уравнения (1) предполагаются непрерывными функциями x на $[a, b]$.

Автор устанавливает существование бесконечного множества полюсов построенной им функции Грина и исследует расположение этих полюсов в комплексной плоскости λ. Далее дается асимптотическое представление функции Грина и ее производных.

Проведенное исследование функции Грина позволяет получить формулу разложения произвольной интегрируемой на каждом отрезке $[a_k, a_{k+1}]$ функции $f(x)$ по главным функциям граничной задачи.

В формуле содержится, как частный случай, формула разложения Тамаркина, получающаяся при $m = 1$. *Н. И. Гаврилов*

1648. Перекрывающиеся пфаффовы формы и их применение в теории полезности. Линдал (Overlapping pfaffians with application to utility theory. Lindahl Clarence H.), Iowa State Coll. J. Sci., 1953, 27, № 2, 210—211 (англ.)

Рассматривается пфаффова форма $\sum X_j\, dx_j$, удовлетворяющая условию

$$X_j = X_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \neq 0.$$

Из нее выделяются трехчленные (перекрывающиеся между собой) пфаффовы формы вида

$$w_i = \sum_{j=i}^{i+2} X_j\, dx_j.$$

Теорема 1. Пусть w_i и w_{i+1} обладают интегрирующими (приводящими к полному дифференциалу) множителями, соответственно, u_i и u_{i+1}. Тогда для существования u_i, не зависящего от x_i, и u_{i+1}, не зависящего от x_{i+1}, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

$a_{i,i+1}$ не зависит от x_{i+2},
$a_{i+1,i+2}$ » » » x_i и x_{i+3},
$a_{i+2,i+3}$ » » » x_{i+1}.

Здесь $a_{r,s}$ — коэффициенты внешнего дифференциала пфаффовой формы.

Теорема 3. Пусть $w_{i-2}, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ обладают интегрирующими множителями u_j $(j = i-2, \ldots, i+3)$, причем каждый u_j не зависит от соответствующего x_j. Тогда $w_{i-2}, \ldots, w_{i+3}$ представляют собой полные дифференциалы.

В работе указаны и другие (более узкие) результаты такого же типа. Все утверждения даны без доказательств.

В заключение указывается мнимое «приложение» полученных результатов к вопросам экономики (интегрируемость и неинтегрируемость истолковываются соответственно как рациональное и нерациональное поведение потребителя и т. п.). *П. К. Рашевский*

1649 Д. О существовании собственных значений и полноте системы собственных функций в краевой задаче обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Нам Дян-чун. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1953

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1650. Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах. Аржаных И. С., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3(55), 99—104

Методы Пуассона и Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона распространяются на системы в точных дифференциалах вида

$$dq_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu}\right)dt_\sigma, \quad dp_\nu = -\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\nu}\right)dt_\sigma$$
$$(\nu = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

или, что то же,

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu}, \quad \frac{\partial p_\nu}{\partial t_\sigma} = -\frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\nu},$$
$$(\sigma = 1, \ldots, s;\ \nu = 1, \ldots, n),$$

где $H_\sigma = H_\sigma(t_1, \ldots, t_s, \ q_1, \ldots, q_n, \ p_1, \ldots, p_n)$. Интегралом такой системы служит соотношение $\Phi(t_1, \ldots, t_s, \ q_1, \ldots, q_n, \ p_1, \ldots, p_n) = \text{const}$, если Φ удовлетворяет системе уравнений $\partial\Phi/\partial t_\sigma + (H_\sigma\Phi) = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$, где обозначено

$$(H\Phi) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial q_\nu} - \frac{\partial H}{\partial q_\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial p_\nu}\right).$$

Доказывается, что для полной интегрируемости системы (1) достаточно, чтобы функции H_σ удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial H_\sigma}{\partial t_\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial t_\sigma} = (H_\sigma H_\rho) \qquad (\sigma = 1, \ldots, s;\ \rho = 1, \ldots, s). \qquad (2)$$

Если $\Phi_1 = C_1$ и $\Phi_2 = C_2$ — два интеграла вполне интегрируемой системы (1), то соотношение $(\Phi_1\Phi_2) = C$ также является интегралом этой системы. Если выполнены равенства (2) и найден полный интеграл $V(t_1, \ldots, t_s, \ q_1, \ldots, q_n, \ a_1, \ldots, a_n) = \text{const}$ совместной системы

$$\frac{\partial V}{\partial t_\sigma} + H_\sigma\left(t_1, \ldots, t_s, \ q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0$$
$$(\sigma = 1, \ldots, s),$$

то функции $q_\nu(t_1, \ldots, t_s, \ a_1, \ldots, a_n, \ b_1, \ldots, b_n)$, $p_\nu(t_1, \ldots, t_s, \ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$, найденные из равенства

$$p_\nu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu}, \quad \frac{\partial V}{\partial a_\nu} = b_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

являются решением системы (1).

Особо рассмотрен случай, когда все $\partial H_\sigma/\partial t_\rho \equiv 0$. Разобран пример нахождения системы интегралов.

А. Д. Мышкис

1651. О конструкции нового интеграла уравнений Лагранжа второго рода по двум данным. Рузсак Б. И., Докл. АН Узб. ССР, 1953, № 6, 7—11 (русск.; резюме узб.)

Вновь доказывается (для уравнений Лагранжа 2-го рода) известная теорема Пуассона.

В. В. Румянцев

1652. Замкнутое решение некоторых граничных задач математической физики. Алексеева О. П., Прикл. математика и механика, 1953, **17**, № 5, 627—630

Рассматривается несколько краевых задач:

1. Найти решение уравнения

$$u_t = u_{yy} \qquad (1)$$

при условиях

$$u|_{y=0} = P = \text{const}, \ u|_{y=l} = 0 \quad (t > 0),$$
$$u|_{t=0} = 0 \quad (0 < y < l). \qquad (2)$$

Решение задачи (1) — (2) дается формулой

$$u(y, t) = \frac{P(l-y)}{2l} + \frac{P}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-i\tau t}\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}} - \frac{e^{i t\tau}\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\right]d\tau.$$

Это замкнутое решение впервые было получено Н. П. Еругиным (Прикл. математика и механика, 1950, **14**, № 2).

2. Найти решение уравнения

$$u_t = u_{zz} \qquad (3)$$

при условиях

$$u|_{z=0} = 0, \ u|_{z=h} = \psi(t) \ (t>0), \ u|_{t=0} = 0 \ (0<z<h). \qquad (4)$$

Решение задачи (3) — (4) дается в замкнутой форме

$$u(z, t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \psi(\tau)\left\{\frac{z}{2h} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{1}{\xi}\frac{\sin z\sqrt{-i\xi}}{\sin h\sqrt{-i\xi}}e^{i\xi(t-\tau)} - \frac{\sin z\sqrt{i\xi}}{\sin h\sqrt{i\xi}}e^{-i\xi(t-\tau)}\right]d\xi\right\}d\tau.$$

М. М. Смирнов

1653. О полноте системы метагармонических функций. Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 5, 715—718

Изучается система функций

$$U_{nm} = (\lambda r)^{-1/2}J_{n+1/2}(\lambda r)\ P_{nm}(\cos\theta)\begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \qquad (1)$$
$$(m \leqslant n),$$

которые названы метагармоническими шаровыми функциями первого рода.

В ряде теорем доказано:

1. Система (1) полна и соответствующая ортонормальная система $\{V_n\}$ замкнута относительно замкнутой поверхности S Ляпунова, если $\lambda \notin S(D_i)$, где $S(D_i)$ — спектр собственных значений однородной задачи Дирихле в области D_i, ограниченной поверхностью S, для метагармонического уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0. \qquad (2)$$

2. Если $\lambda \in S(D_i)$, то для полноты к системе (1) надо добавить полную систему соответствующих собственных функций.

3. Всякую непрерывную в $D_i + S$ функцию, которая в D_i является решением (2), можно в $D_i + S$ равномерно аппроксимировать при помощи линейной комбинации функций V_n. Если $\lambda \notin S(D_i)$, то такую функцию можно разложить в ряд по функциям $\{V_n\}$, который внутри D_i сходится абсолютно и равномерно.

4. Любую непрерывную на S функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи линейной комбинации V_n тогда и только тогда, когда $\lambda \notin S(D_i)$.

Отмечается, что подобные теоремы можно доказать для областей более общего вида.

При $\lambda = 0$ система (1) изучена в другой работе автора (см. реф. 1698). *Э. Я. Риекстыньш*

1654. Об одном классе гармонических функций. Тополянский Д. Б., Научн. зап. Днепропетровского гос. ун-та, 1953, **41**, 165—168

Пусть плоская конечная область T ограничена замкнутой гладкой линией L, а функция ψ^* непрерывна в $T + L$ и гармонична в T. При помощи формулы Грина автор сразу получает, что если функция ψ непрерывно дифференцируема в $T + L$, гармонична в T и

$$\int_L (\psi - \psi^*) \frac{d\psi}{dn} dL \leqslant 0 \qquad (1)$$

(n — внешняя нормаль), то $D(\psi) \leqslant D(\psi^*)$ (D — интеграл Дирихле). (Равенство достигается здесь только при $\psi - \psi^* = \text{const}$.— Прим. реф.). Отсюда следует, что не существует гармонической функции ψ, сопряженной с ψ^* ($\psi^* \neq \text{const}$), удовлетворяющей (1). Если неравенство (1) заменить на противоположное, то $D(\psi)$ и $D(\psi^*)$ в общем случае несравнимы. Работа связана со статьей автора в том же журнале (1948, **34**, № 3). Ссылок на работы других авторов нет.

Примечания референта. Лемму в начале стр. 167 следует формулировать так: если $\psi^* \not\equiv \text{const}$, то в классе U_1 не существует гармонической функции, сопряженной с ψ^*. Теорема III не может считаться доказанной, так как не обосновано существование функции ψ. *А. Д. Мышкис*

1655. Суб-бигармонические функции. Брадфорд (Sub-biharmonic functions. Bradford W. H.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 173—176 (англ.)

Функцию $u(x, y)$ автор называет суб-бигармонической в некоторой области, если в каждой точке этой области выполняется неравенство $\nabla^2(\nabla^2 u) \leqslant 0$; ∇^2 — оператор Лапласа.

Пусть ρ, θ — полярные координаты с полюсом в точке (x_0, y_0); вводятся обозначения:

$$L_\rho(f; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta)\, d\theta,$$

$$A_\rho(f; x_0, y_0) = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{\rho} \int_0^{2\pi} f(r, \theta)\, r dr d\theta;$$

$$\mathfrak{L}_\rho(f; x_0, y_0) = \frac{1}{1-\mu^2} [L_{\mu\rho}(f; x_0, y_0) - \mu^2 L_\rho(f; x_0, y_0)],$$

$$\mathfrak{A}_\rho(f; x_0, y_0) = \frac{1}{1-\mu^2} [A_{\mu\rho}(f; x_0, y_0) - \mu^2 A_\rho(f; x_0, y_0)],$$

$$0 < \mu < 1.$$

Доказывается, что достаточно гладкая функция будет в некоторой области суб-бигармонической тогда и только тогда, когда для каждого круга, лежащего внутри данной области, выполняется одно из следующих неравенств:

$$L_\rho(\nabla^2 u; x_0, y_0) \leqslant A_\rho(\nabla^2 u; x_0, y_0),$$

$$u(x_0, y_0) \leqslant 2A_\rho(u; x_0, y_0) - L_\rho(u; x_0, y_0),$$

$$u(x_0, y_0) \leqslant \mathfrak{L}_\rho(u; x_0, y_0),$$

$$u(x_0, y_0) \leqslant \mathfrak{A}_\rho(u; x_0, y_0),$$

где $u(x, y)$ — данная функция, а ρ — радиус круга. Доказывается также, что для любой суб-бигармонической функции величины $\mathfrak{L}_\rho(u; x_0, y_0)$ и $\mathfrak{A}_\rho(u; x_0, y_0)$ суть возрастающие функции от ρ.

С. Г. Михлин

1656. Обобщение одного результата С. М. Никольского. Аманов Т. И., Докл. АН СССР, 1953, **90**, № 6, 949—952

Изучаются гармонические функции

$$U = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

на единичном круге σ. Доказываются неравенства

$$C_2 D_m[U] \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} k^{2m-1}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant C_1 D_m[U],$$

где

$$D_m[U] = \iint_\sigma \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial^m U}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)^2 dx\, dy,$$

а постоянные C_1 и C_2 не зависят от U. Исследуется связь между суммируемостью на σ квадратов обобщенных производных порядка m гармонической функции U и свойством ее граничных значений $U|_{\rho=1}$ в терминах H-классов (см. С. М. Никольский, Тр. Мат. ин-та им. Стеклова, 1951, **38**, 244—278). Если $D_m[U] < \infty$, то $U|_{\rho=1} \in H_2^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}$. Если же $U|_{\rho=1} \in H_2^{\left(m-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}$, то при $\varepsilon = 0$ может быть как $D_m[U] = \infty$, так и $D_m[U] < \infty$, а при $\varepsilon > 0$ всегда $D_m[U] < \frac{CM^2}{\varepsilon}$ (постоянная C не зависит от U). В случае $m = 1$ эти результаты доказаны С. М. Никольским (Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 1, 23—25), развившим соответствующие результаты С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева (Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950). *Л. Д. Кудрявцев*

1657. О единственности классического интеграла энергии. Волков Д. М., Вестн. ЛГУ, 1953, № 5, 3—13

В m-мерном пространстве $x_1, \ldots, x_m$ рассматриваются функции $u(x_1, \ldots, x_m, t)$, $v(x_1, \ldots, x_m, t)$, удовлетворяющие волновому уравнению. Составляется выражение

$$J_1 = \int_D \{g^{ik}u_i v_k + g^{tt}u_t v_t + g^{it}u_i v_t + g^{ti}u_t v_i + g^{0t}uv_t + g^{t0}u_t v + g^{0i}uv_i + g^{i0}u_i v + g^{00}uv\}\,dx + \int_S Huv\,ds,$$

где первый интеграл берется по некоторой пространственной области D, а второй — по ее границе S. При этом $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ и аналогично для v; коэффициенты g^{ik}, $g^{tt}, \ldots$ — некоторые функции $x_1, \ldots, x_m$.

На границе S функции u, v подчиняются одному из следующих 4 условий:

1) $u = 0$, $v = 0$; 2) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$;

3) $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0$; 4) $\frac{\partial u}{\partial n} + hu_{tt} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} + hv_{tt} = 0$.

В каждом случае до конца решается вопрос, при каких $g^{ik}, g^{tt}, \ldots$ выражение J_1 при изменении t остается инвариантным (входящие в J_1 u, v — произвольные функции, удовлетворяющие вышеуказанным требованиям). *П. К. Рашевский*

1658. Теоремы единственности для задачи Трикоми. Протте р (Uniqueness theorems for the Tricomi problem. Protter M. H.), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 1, 107—114 (англ.)

Рассматривается уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (1)$$

где $K(y)$ — монотонно возрастающая функция с непрерывной второй производной, удовлетворяющая условию $K(0) = 0$.

В полуплоскости $y < 0$ уравнение (1) имеет два семейства характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}. \qquad (3)$$

Пусть P и Q ($P > Q$) — две точки оси x-ов. Обозначим через D область, ограниченную спрямляемой кривой Жордана Γ_1 с концами в точках Q и P, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$, характеристикой Γ_2 семейства (3), выходящей из точки Q, и характеристикой Γ_3 семейства (2), выходящей из точки P.

Квазирегулярным решением уравнения (1) в области D автор называет такое решение этого уравнения, для которого существуют интегралы:

$$\int_Q^P u(x, 0)\,u_y(x, 0)\,dx, \qquad \iint_A (Ku_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

(A — эллиптическая часть области D), а для интегралов:

$$\iint_D uLu\,dx\,dy, \qquad \iint_D u_x Lu\,dx\,dy, \qquad \iint_D u_y Lu\,dx\,dy$$

применима теорема Грина.

Дается доказательство следующих двух теорем единственности:

Теорема 1. Существует такая постоянная $d_0 < 0$, что если

$$F(y) \equiv 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 1 \geqslant d_0$$

в области D, а $u(x, y)$ является квазирегулярным решением (1), исчезающим на Γ_1 и Γ_2, то $u(x, y) \equiv 0$ в области D.

Теорема 2. Существует такая постоянная $d_1 > 0$, что если максимальная ордината y_m точек кривой Γ_1 удовлетворяет условию $y_m < d_1$, а $u(x, y)$ является квазирегулярным решением (1) в области D, исчезающим на Γ_1 и Γ_2, то $u(x, y) \equiv 0$ в области D. (Теоремы эти доказываются в предположении, что $F(0) > 0$ и $K'(y) \neq 0$ при $y < 0$.)

В работе доказывается также единственность решения задач типа (T) для областей, гиперболическая часть границы которых состоит, кроме кусков Γ_2 и Γ_3, еще из кусков характеристик, выходящих из промежуточных точек между Q и P. *А. В. Бицадзе*

1659. О задаче Коши для линейных уравнений с частными производными. Пу ччи (Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. Pucci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 198—202 (итал.)

Функция $\varphi(x, t)$, заданная на прямоугольнике $R \equiv [|x| \leqslant l, \ |t| \leqslant h]$, принадлежит к классу Γ_σ ($\sigma \geqslant 0$), если она обладает в R производными по x любого порядка, причем для некоторых $M > 0$ и $\rho > \sigma$

$$\left|\frac{\partial^n \varphi(x, t)}{\partial x^n}\right| < Mn!\,\rho^{-n} \quad \text{для} \quad (x, t) \in R, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \text{для} \quad (x, t) \in R,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x) \quad \text{для} \quad |x| \leqslant l.$$

Пусть функции $a(t)$, $f(x, t)$ непрерывны на R, а функции $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(x, t)$ класса $\Gamma_{el\alpha}$ на R, где $\alpha = \sqrt{\max|a(t)|}$. Тогда доказывается, что в классе $\Gamma_{h\alpha}$ существует одно и только одно непрерывное решение поставленной задачи, имеющее по x, а также по t непрерывные производные

1-го и 2-го порядков. Этим решением служит сумма равномерно сходящегося в R ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n F(x, t),$$

где

$$F(x, t) = \int_0^t (t-\tau) f(x, \tau)\, d\tau + u_0(x) + u_1(x)\, t,$$

а B — интегро-дифференциальный оператор

$$B\varphi(x, t) = -\int_0^t (t-\tau)\, a(\tau)\, \frac{\partial^2 \varphi(x, \tau)}{\partial x^2}\, d\tau \qquad (B^0\varphi \equiv \varphi).$$

Приведенные примеры показывают, что полученная формула иногда дает возможность получить решение в конечном виде, а иногда — получить приближенное решение с оценкой ошибки. Доказанная теорема сравнивается с теоремой Коши—Ковалевской (в обоих случаях тип уравнения несущественен), однако первая теорема в некоторых случаях гарантирует существование решения в большей области, чем вторая.

Примечание референта. В статье имеются опечатки: в некоторых оценках вместо $<$ должно быть $\leqslant$; на стр. 201, строка 8 снизу, множитель $(-1)^n$ лишний; на стр. 201, строка 2 снизу, перед интегралом надо переменить знак.

А. Д. Мышкис

1660. Об одной сингулярной задаче Дирихле. Брусс (Sur un problème de Dirichlet singulier. Brousse Pierre), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 18, 1731—1732 (франц.)

В работе сформулирован (без доказательства) ряд свойств решений уравнений

$$v_{xx} + v_{yy} - \frac{k}{y} v_y = 0, \tag{1}$$

$$S_{xx} + S_{yy} + \frac{k+2}{y} S_y = 0, \tag{2}$$

$$k = \text{const} > 0,$$

в односвязной области D, ограниченной отрезком AB оси Ox и кривой Γ, лежащей целиком в полуплоскости $y > 0$.

Главными из этих свойств являются следующие: а) задача Дирихле с непрерывными условиями на границе области D всегда имеет решение (единственное) для уравнения (1) и не имеет, вообще говоря, решения для уравнения (2); б) уравнение (2) всегда имеет единственное, регулярное в области D, решение $S(x, y)$, которое принимает заданные непрерывные значения на Γ и для которого выражение $y^{k+1} S(x, y) = 0$ внутри отрезка AB и ограничено на концах A, B.

Простым преобразованием независимых переменных $x = \xi$, $y = 2\eta^{(2-c)/(2-c)}$ уравнения (1) и (2) приводятся к виду

$$u_{\xi\xi} + \eta^c u_{\eta\eta} = 0, \tag{3}$$

где $c = 2k/(k+1) < 2$ в случае уравнения (1) и $c = 2 + 2/(k+1) > 2$ в случае уравнения (2). Свойства а) и б) решений уравнения (3) были установлены в 1951 г. М. В. Келдышем (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 2, 181—183). *А. В. Бицадзе*

1661. Метод Ньютона и обобщенные решения нелинейных уравнений эллиптического типа. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1263—1266

Оператор

$$Pu = \sum_{i+k=2} A_{ik}(x_j; p_j, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i \partial x_2^k} + B(x_j; p_j, u);$$

$$p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

задается на множестве функций из $W_p^{(2)}$ (в обозначениях С. Л. Соболева), обращающихся в нуль на границе Γ области Ω. Граница Γ предполагается достаточно гладкой. Утверждается, что при $p > 2$ оператор P дважды дифференцируем по Фреше, если вторые производные от A_{ik} и B по p_1, p_2, u равномерно ограничены в любой замкнутой области значений этих параметров. Далее формулируется теорема, согласно которой решение эллиптического уравнения

$$\sum_{i+k=2} \alpha_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i \partial x_2^k} + \sum_{j=1}^{2} \beta_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \gamma(x)\, u = f(x)$$

при краевом условии $u|_\Gamma = 0$ существует в $W_p^{(2)}$, $p > 1$, если гарантирована единственность этого решения; для него имеет место оценка

$$\| u \|_{W_p^{(2)}} \leqslant B_p \| f \|_{L_p}; \qquad B_p = \text{const}; \tag{1}$$

предполагается, что $f(x) \in L_p$, и что коэффициенты α_{ik}, β_j, γ непрерывны в $\bar{\Omega} + \Gamma$. Перечисленные утверждения позволяют применить к уравнению $Pu = 0$ предложенный Л. В. Канторовичем так называемый обобщенный метод Ньютона.

Рассмотрена задача о минимальной поверхности; эта задача сводится к интегрированию в области Ω уравнения

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$$

при краевом условии $u|_\Gamma = \varphi(s)$. Формулируется результат, полученный при помощи метода Ньютона:

Пусть u_0 — гармоническая в Ω функция, равная $\varphi(s)$ на Γ, и пусть

$$\| u_0 \|_{W_p^{(2)}} \leqslant \frac{2}{3\sqrt{B_p}}, \quad p > 2,$$

где B_p — постоянная неравенства (1) для оператора Лапласа. Существует обобщенное решение задачи о минимальной поверхности, удовлетворяющее неравенству

$$\| u - u_0 \|_{W_p^{(2)}} \leqslant \frac{2B_p \| u_0 \|^3_{W_p^{(2)}}}{3\left(1 - \| u_0 \|^2_{W_p^{(2)}} B_p^2\right)}.$$

Приводится также оценка быстроты сходимости последовательных приближений по методу Ньютона. Отмечается, что обобщенное решение задачи о минимальной поверхности можно построить и в случае прямоугольной области Ω и что оценки С. Н. Бернштейна позволяют получить решение задачи о минимальной поверхности «в большом» для гладкого выпуклого контура. *С. Г. Михлин*

1662. О нелинейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных и условии Гёльдера. Ниренберг (On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Nirenberg Louis), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 1, 103—156 (англ.)

Новый способ получения оценок производных от решения уравнения эллиптического типа второго порядка при двух аргументах дает возможность уточнить ряд ранее известных теорем об основных свойствах таких решений. Этот способ (см. также Morrey C. B., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **43**, 126—166; Univ. Calif. Publs Math., 1943, **1**, гл. 2 и 3 и Shiffman M., Ann. Math., 1947, **48**, № 2, 274—284) был усовершенствован Фридрихсом (Friedrichs K. O.). В основе его лежат леммы:

1) Пусть функция $p(x, y)$ гладкая (т. е. непрерывно дифференцируемая) на открытом множестве $\mathfrak{A}$ плоскости (x, y). Пусть множество $\mathfrak{B}$ замкнуто и для некоторого $d>0$ $O(\mathfrak{B}, 2d)\subset\mathfrak{A}$ (буквой O обозначаем окрестность). Пусть $|p(x, y)|\leqslant K_1$ на $\mathfrak{A}$ и пусть найдутся такие $M>0$ и α, $0<\alpha<1$, что если $A\in\mathfrak{B}$, то

$$\iint\limits_{O(A,d)} r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2)\,dx\,dy\leqslant M$$

(r — расстояние от A до точки интегрирования). Тогда $p(x, y)$ в $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha/2$ и коэффициентом, зависящим только от K_1, M, α и d.

2) Пусть функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ гладкие на $\mathfrak{A}$ и удовлетворяют там неравенству $p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2\leqslant k(p_yq_x-p_xq_y)+k_1$, где $k\geqslant 0$, $k_1\geqslant 0$, причем $|q(x, y)|\leqslant K_1$. Пусть $\mathfrak{B}$ замкнуто и $O(\mathfrak{B}, 2d)\subset\mathfrak{A}$. Тогда существуют такие $M>0$ и α, $0<\alpha<1$, зависящие только от k, k_1, K_1 и d, что если $A\in\mathfrak{B}$, то

$$\iint\limits_{O(A,d)} r^{-\alpha}(p_x^2+p_y^2+q_x^2+q_y^2)\,dx\,dy\leqslant M.$$

Эти леммы дают обобщение одной теоремы о квазиконформных отображениях (Лаврентьев М. А., Изв. АН СССР, сер. мат., 1948, **12**, 513—554) и дают возможность получить при помощи рассмотрения $p=z_x$, $q=z_y$ следующую теорему:

Теорема. Если на $\mathfrak{A}$ функция $z(x, y)$ дважды гладкая и удовлетворяет уравнению $A(x, y)\,z_{xx}+B(x, y)\,z_{xy}+C(x, y)\,z_{yy}+D(x, y)=0$, причем $\max\{|A|, |B|, |C|, |D|\}\leqslant K$, $\max\{|z_x|, |z_y|\}\leqslant K_1$ (в $\mathfrak{A}$) и для некоторого $\lambda>0$ при любых ξ, η $A\xi^2+B\xi\eta+C\eta^2\geqslant\lambda(\xi^2+\eta^2)$ (в $\mathfrak{A}$), а $\mathfrak{B}$ определено как ранее, то z_x и z_y удовлетворяют на $\mathfrak{B}$ условию Гёльдера с константами, зависящими только от K, K_1, λ и d. Эта теорема, примененная к $[z(x+h, y)-z(x, y)]/h$ ($h>0$, $h\to 0$), дает в свою очередь другую теорему:

Теорема. Пусть $z(x, y)$ дважды гладкая на $\mathfrak{A}$ и удовлетворяет там уравнению

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy})=0, \qquad (1)$$

причем F гладкая в некоторой окрестности двумерной поверхности S в восьмимерном пространстве, задаваемом решением $z(x, y)$, а производные первого порядка от F ограничены на S по абсолютной величине константой K. Пусть $\max\{|z_x|, |z_y|, |z_{xx}|, |z_{xy}|, |z_{yy}|\}\leqslant K_1$ (в $\mathfrak{A}$) и для некоторого $\lambda>0$ при любых ξ, η $F_r\xi^2+F_s\xi\eta+F_t\eta^2\geqslant\lambda(\xi^2+\eta^2)$ (на S, где $r=z_{xx}, \ldots$), а $\mathfrak{B}$ определено как ранее. Тогда z_{xx}, z_{xy} и z_{yy} удовлетворяют на $\mathfrak{B}$ условию Гёльдера с константами, зависящими только от K, K_1, λ и d.

Поскольку в этой теореме выполнение условия Гёльдера для z_{xx}, z_{xy} и z_{yy} выводится из их непрерывности, то, привлекая результаты Жиро (Giraud G., Ann. scient. Ecole norm. supér., 1930, **47**, 197—266), мы приходим к основной теореме:

Теорема. Если z является дважды гладким решением уравнения (1) на $\mathfrak{A}$, причем F имеет непрерывные производные в некоторой окрестности S до m-го ($m\geqslant 1$) порядка, которые удовлетворяют условию Гёльдера (по совокупности восьми аргументов), то z имеет на $\mathfrak{B}$ непрерывные производные до $(m+2)$-го порядка, которые удовлетворяют условию Гёльдера (в конце работы имеются и оценки этих производных); если же F аналитична в окрестности S, то z аналитична на $\mathfrak{A}$. Последнее утверждение является уточнением теоремы С. Н. Бернштейна (Math. Ann., 1904, **59**, 20—76), который требовал, чтобы z была трижды гладкой (см. также Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951, дополнения).

Доказываются также варианты перечисленных лемм и теорем, в которых при некоторых дополнительных ограничениях (в частности, требуется, чтобы $\mathfrak{A}$ было ограничено конечным числом попарно непересекающихся замкнутых дважды гладких линий) говорится о выполнении соответствующих утверждений сразу во всем $\mathfrak{A}$ (а не в $\mathfrak{B}$) (в леммах интегрирование тогда производится по $O(A, d)\cap\mathfrak{A}$). Эта модификация дает возможность получить новые условия существования решения первой краевой задачи для квазилинейного уравнения

$$A(x, y, z, z_x, z_y)\,z_{xx}+B(x, y, z, z_x, z_y)\,z_{xy}+C(x, y, z, z_x, z_y)\,z_{yy}=0 \qquad (2)$$

при краевом условии $z=\varphi(s)$ на границе $\mathfrak{A}$ (эта граница предполагается связной, трижды гладкой и с кривизной, отличной от нуля). Подстановка какой-либо функции $z(x, y)$ в коэффициенты A, B, C превращает уравнение (2) в линейное, что дает возможность (при определенных ограничениях) воспользоваться результатами Шаудера (Schauder J., Math. Z., 1934, **38**, № 2, 257—282) и определить решение полученного линейного уравнения при заданном граничном условии. Тем самым опреде-

ляется оператор $z \to Z[z]$ на некотором множестве функций, заданных на $\overline{\mathfrak{A}}$. Применение оценок Шаудера и оценок, полученных в данной работе, одного результата Радо (Radó T., Acta Liter. Sci. reg. Univ. hung., 1924—1926, 228—253), а также известной теоремы Шаудера о неподвижных точках отображения множества в банаховом пространстве дает возможность доказать существование неподвижной точки для данного оператора и тем самым получить следующую теорему:

Теорема. Пусть коэффициенты A, B, C уравнения (2) определены при $(x, y) \in \overline{\mathfrak{A}}$ и для всех z, p, q, причем для каждого $K > 0$ при $(x, y) \in \overline{\mathfrak{A}}$, $\max\{|z|, |p|, |q|\} \leqslant K$ удовлетворяют по (x, y, z, p, q) условию Гёльдера с константами, зависящими от K, и $A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 \geqslant m(K)(\xi^2+\eta^2)$ (где $m(K) > 0$); пусть $\varphi''(s)$ также удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда существует решение поставленной краевой задачи, вторые производные от которого удовлетворяют в $\mathfrak{A}$ условию Гёльдера (константы, входящие в это условие, оцениваются). Эта теорема также обобщает результат Бернштейна (Math. Ann., 1910, **69**, 82—136). Имеются и некоторые другие оценки, относящиеся к решению, а также некоторые другие теоремы о его существовании.

А. Д. Мышкис

1663. Разложения по собственным функциям, связанные с уравнениями в частных производных (II). Титчмарш (Eigenfunction expansions associated with partial differential equations (II). Titchmarsh E. C.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 9, 80—98 (англ.)

Реферируемая работа является продолжением работы автора (Proc. London Math. Soc., 1951, сер. 3, **1**, 1—27). Изучается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0 \qquad (1)$$

во всей (x, y)-плоскости. На функцию $q(x, y)$ накладываются ограничения: 1) непрерывность в каждой конечной области, 2) ограниченность снизу и 3) $q(x, y) \to +\infty$ при $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$.

Известно, что при выполнении условия 3) спектр уравнения (1) дискретен и имеет единственную предельную точку на бесконечности. В начале работы автор доказывает, что при выполнении условий 1)—3) функция Грина оператора (1) (которая существует при недействительных λ) единственна, т. е. индексы дефекта оператора (1) суть (0, 0). Заметим, что этот результат был ранее доказан Карлеманом (Carleman T., Arkiv math., astr., fysik, 1934, **24**, № 11, 1—7).

Далее автор рассматривает вопрос о разложении функции с интегрируемым квадратом во всей (x, y)-плоскости по собственным функциям уравнения (1). В этом направлении в работе доказаны следующие теоремы:

1. Пусть $f(x, y) \in L_2$ и пусть $f(x, y)$ абсолютно непрерывна по x для всех y и абсолютно непрерывна по y для всех x.

Далее, пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (f_x^2 + f_y^2 + qf^2)\, dx\, dy < \infty.$$

Положим

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \varphi_n(x, y)\, dx\, dy.$$

Тогда ряд $\sum_1^\infty c_n \varphi_n(x, y)$ сходится к $f(x, y)$.

2. Пусть $f(x, y) \in L_2$ и пусть в некоторой точке (x, y) функция $f(x, y)$ непрерывна или, более обще,

$$\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)\, d\varphi = 2\pi f(x, y).$$

Тогда

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \sum_{\lambda_n < \Lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\Lambda}\right) c_n \varphi_n(x, y) = f(x, y). \qquad (2)$$

Примечание референта. В работе референта (РЖМат, 1953, 753) доказано, что для оператора Лапласа в равенстве (2) множитель $\left(1 - \frac{\lambda_n}{\Lambda}\right)$ можно заменить на множитель $\left(1 - \frac{\lambda_n}{\Lambda}\right)^{1/2+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Это же справедливо и для уравнения (1).

Б. М. Левитан

1664. О собственных функциях задачи о колебаниях мембраны. Самбасива (On eigenfunctions of the membrane problem. Sambasiva Rao P.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 1, 1—20 (англ.)

Пусть D — конечная область k-мерного евклидова пространства, ограниченная гладкой поверхностью B. Пусть $\{\omega_n(P)\}$ и $\{\lambda_n\}$ $(0 \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1})$ полная ортонормированная система собственных функций и собственных значений уравнения

$$\Delta u + \lambda u \equiv \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + \lambda u = 0$$

при условиях на границе для

задачи I: $u|_B = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

задачи II: $\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_B = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda_0 = 0,\ \omega_0 = \text{const}$, N — нормаль к $B)$.

Рассматривается ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(P)\,\omega_n(Q)}{\lambda_n^{s+\beta/2+k/4}} J_{\beta+k/2}(R\sqrt{\lambda_n}),$$

где P и Q — две внутренние точки области D, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν, β — вещественное число, $R > 0$, $s = \sigma + i\tau$ — комплексное число. Этот ряд сходится абсолютно для всех достаточно больших значений σ $(\sigma > \sigma_0)$, и его сумма есть аналитическая функция s в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, обозначаемая автором $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$.

Доказывается: $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$ аналитически продолжима на всю плоскость s; если P и Q — две раз-

личные внутренние точки области D, d — расстояние между ними и $R>0$ таково, что шар радиуса R с центром в P или Q полностью лежит в D, то

1) если $R\neq d$, то $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$ есть целая функция s для всех вещественных значений β;

2) если $R=d$, то $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$ есть мероморфная функция с простыми полюсами на вещественной оси для всех вещественных значений β. Первый полюс лежит в точке $s=-\beta/2$, если β не есть целое четное число, и в точке $s=-(\beta+1)/2$, если β есть четное число. Остальные полюсы лежат левее первого. Если k нечетное и β целое, то $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$ имеет конечное число полюсов. В случае $Q=P$ $\zeta_k(P, P, \beta; s)$ является целой функцией s.

В случае $\beta>-1$ доказываются более точные результаты относительно расположения нулей и полюсов $\zeta_k(P, Q, \beta; s)$ и затем при помощи рекуррентной формулы

$$\zeta_k(P,Q,\beta;s)=\frac{2\beta+k+2}{R}\zeta_k(P,Q,\beta+1;s)-$$
$$-\zeta_k(P,Q,\beta+2;s-1),$$

вытекающей из рекуррентной формулы для функций Бесселя, получаются результаты для любого вещественного β, отмеченные выше.

Х. Л. Смолицкий

1665. Об одной граничной задаче теории ньютонова потенциала. Векилов Ш. И., Изв. АН Азерб. ССР, 1953, № 4, 3—25 (русск.; резюме азерб.)

Обозначим через D трехмерную область, ограниченную замкнутыми не пересекающими друг друга поверхностями Ляпунова $S_0, S_1, \ldots, S_{m+n}$, из которых S_0 содержит внутри себя все остальные. Пусть σ — замкнутая поверхность Ляпунова, лежащая целиком внутри области D.

Рассматривается следующая задача теории потенциала: требуется определить функцию $U(x, y, z)$ со свойствами: а) $U(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, б) она гармонична в области D всюду, кроме поверхности σ, в) на границе $S=S_0+S_1+\ldots+S_{n+m}$ области D она принимает заданные значения, г) нормальная производная от $U(x, y, z)$ удовлетворяет на поверхности σ условию

$$\left(\frac{dU}{dn}\right)_+=k\left(\frac{dU}{dn}\right)_-,$$

где k — положительная постоянная, а знаки $+$ и $-$ указывают, что предельные значения принимаются при приближении к σ соответственно изнутри и извне.

В случае, когда поверхность σ отсутствует, получается классическая задача Дирихле.

Используя метод Н. И. Мусхелишвили (Мусхелишвили Н. И., Прикл. математика и механика, 1940, **4**, № 4, 3—26), автор доказывает, что сформулированная выше задача всегда имеет решение и притом единственное. *А. В. Бицадзе*

1666. Обобщенная осесимметрическая теория потенциала. Вейнштейн (Generalized axially symmetric potential theory. Weinstein Alexander), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 20—38 (англ.)

Дается далеко не полный обзор результатов по теории дифференциального уравнения в частных производных

$$(y^p\varphi_x)_x+(y^p\varphi_y)_y=0,\quad y\geqslant 0, \tag{1}$$

где p — положительный параметр. Решение φ уравнения (1) автор называет осесимметрическим потенциалом в пространстве $n=p+2$ измерений (для нецелочисленных p пространство будет фиктивным), а теорию уравнения (1) для произвольных положительных значений p — обобщенной осесимметрической теорией потенциала.

Для потенциала $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющих обобщенной системе Стокса — Бельтрами

$$y^q\varphi_x=\psi_y,\quad y^q\varphi_y=-\psi_x, \tag{2}$$

получаются уравнения вида (1) со значениями параметра $p=q$ и $p=-q$ соответственно.

Если обозначить через $\varphi\{p\}$ и $\psi\{p\}$ решения системы (2), то имеет место следующий принцип соответствия, установленный автором:

$$\psi\{p\}=cy^{p+1}\varphi\{p+2\},\quad p\geqslant 0,$$

где c — произвольная постоянная. Этот принцип находит применение при решении ряда задач гидродинамики и теории упругости. В работе коротко говорится о некоторых из этих задач.

С целью сохранения электростатической аналогии автор вводит понятия емкости и виртуальной массы и приводит ряд их свойств.

Если уравнение (1) переписать в виде

$$z_{xx}+z_{yy}+\frac{p}{y}z_y=0, \tag{3}$$

то будет ясно, что прямая $y=0$ является особой линией этого уравнения. В работе приведены: некоторые теоремы существования и единственности решения уравнения (3), принимающего заданные значения на особой линии; выражение фундаментального решения; формула Пуассона, дающая решение задачи Дирихле для полуплоскости $y\geqslant 0$. Указывается также на связь уравнения (3) с уравнением Трикоми

$$\eta z_{\xi\xi}+z_{\eta\eta}=0.$$

В работе нет ни одного указания на исследования советских авторов в этом направлении.

А. В. Бицадзе

1667. Функции Грина операторов $\Delta-k^2$, $\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\Delta-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}$ $(k, c>0)$ для решения задач Дирихле и Неймана в сегменте, полосе и слое. Гарнир (Fonctions de Green des opérateurs $\Delta-k^2, (k>0)$, $\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $(c>0)$, $\Delta-\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}$, $(k>0)$ pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann posés dans un segment, une bande ou une dalle. Garnir H. G.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 1, 29—46 (франц.)

Автор систематизирует большинство известных результатов о нахождении функции Грина для задач, указанных в заглавии.

Сначала даны три выражения функции Грина $G_1(x, x_0, k)$ для оператора $\Delta - k^2$ и периодической задачи в сегменте $[0, d]$, а потом при помощи формальных соотношений

$$G_2(P, P_0, k) = \int_0^\infty G_1(x, x_0, \sqrt{k^2+\lambda^2}) \cos\lambda(y-y_0)\,d\lambda, \tag{1}$$

$$G_3(P, P_0, k) = \int_0^\infty G_1(x, x_0, \sqrt{k^2+\lambda^2}) J_0(\lambda\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2})\,\lambda\,d\lambda \tag{2}$$

соответствующие выражения построены для полосы $0 \leqslant x \leqslant d$ (формула (1)) и слоя $0 \leqslant x \leqslant d$ (формула (2)). Показано, что при $i = 1, 2, 3$, имеет место общая формула

$$G_i(P, P_0, k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_i(P^{(m)}, P_0, k), \tag{3}$$

где $P^{(m)}$ означает либо $P(x+2md)$, либо $P(x+2md, y)$, либо $P(x+2md, y, z)$ и g_i — функция Грина той же задачи для всего соответствующего пространства. Формуле (3) дана физическая интерпретация.

При помощи функции Грина для периодической задачи легко строятся функции Грина для задач Дирихле и Неймана. Потом, используя преобразование Лапласа, автор строит функции Грина операторов $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и $\Delta - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}$ для тех же задач и областей. *Э. Я. Риекстыньш*

1668. Одна краевая задача для уравнения $\partial^4 u/\partial x^4 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. I. Пини (Un problema di valori al contorno per l'equazione $\partial^4 u/\partial x^4 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. I. Pini Bruno), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 5, 609—615 (итал.)

Пусть замкнутая область D на плоскости ограничена гладкими линиями γ_1 и γ_2 с уравнениями $x = \chi_1(y)$ и $x = \chi_2(y)$ $(a \leqslant y \leqslant b;\ \chi_1(y) < \chi_2(y))$ и отрезками c_1 и c_2 прямых $y = a$ и $y = b$. Пусть заданная на D функция ω непрерывна вместе со своей производной по x, причем ω абсолютно непрерывна по y, $\partial\omega/\partial x$ — по x, а $\partial\omega/\partial y$ и $\partial^2\omega/\partial x^2$ суммируемы с квадратом по D. Пусть вспомогательные непрерывные на D функции φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированную систему решений уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

полную в том смысле, что каждое непрерывное в D решение этого уравнения равномерно с любой степенью точности представимо при помощи линейной комбинации функций φ_k (от φ_k надо требовать также достаточную правильность в замкнутой области, чтобы в дальнейшем применять к ним формулу Грина.— Прим. реф.). Пусть при всех этих предположениях $\mathfrak{L}[\omega] \equiv \partial^2\omega/\partial x^2 - \partial\omega/\partial y$ суммируемо по D с показателем > 3 и для некоторого p, $1 < p < 3/2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max_D |\varphi_k|)^{2-p} \left| \int_D \varphi_k \mathfrak{L}[\omega]\,dD \right|^p < \infty.$$

Тогда функция

$$v(P) = v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \int_{S(P)} \left[U(\omega(\xi, \eta)\,d\xi + \frac{\partial\omega}{\partial\xi}\,d\eta) - \omega\frac{\partial U}{\partial\xi}\,d\eta \right] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{D(P)} \Phi U\,dQ$$

образует (понимаемое в обычном смысле) решение уравнения $\partial^4 v/\partial x^4 - \partial^2 v/\partial y^2 = 0$ при краевом условии $v = \omega$ (на $\gamma_1 + \gamma_2 + c_1 + c_2$), $\partial v/\partial x = \partial\omega/\partial x$ (на $\gamma_1 + \gamma_2$). Здесь $D(P)$ — часть D, ограниченная сверху прямой $y = \text{const}$, $S(P)$ — контур этой части, $U(P, Q)$ — фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{L}[u] = 0$, имеющее полюс в точке $Q = (\xi, \eta)$, $\Phi(Q)$ — сумма сходящегося в среднем ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\int_D \varphi_k \mathfrak{L}[\omega]\,dP \right) \varphi_k(Q).$$

Приведено сжатое доказательство. Оно опирается на одну формулу среднего значения, характеризующую решения уравнения (1), на разложение $\partial^4/\partial x^4 - \partial^2/\partial y^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial y)\,\mathfrak{L}$, а также на несколько видоизмененные результаты Марцинкевича и Зигмунда по ортогональным функциям (Marcinkiewicz, Zygmund, Fund. Math., 1937, **28**, 309—335); построение функций φ_k осуществляется при помощи результатов Чиммино (Cimmino G., Giorn. mat. Battaglini, 1928, сер. 3, **66**, 75—98). Имеется краткое обсуждение n-мерного случая. Работа связана с исследованиями Фикера (Fichera G., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1948, **5**, 319—321) по бигармоническому уравнению; к этим исследованиям также приводятся дополнительные замечания. Вопрос о единственности решения не обсуждается. Начало п. 2 (стр. 613) изложено несколько неясно. *А. Д. Мышкис*

1669. Применение линейной аппроксимации для интегрирования одного класса нелинейных векторных дифференциальных уравнений. Гилварри (Linear approximations in a class of non-linear vector differential equations. Gilvarry J. J.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 2, 145—156 (англ.)

Если скалярная функция $\varphi(\mathbf{r})$ разложена в ряд Тейлора вдоль кривой, проходящей через нулевую точку, то, выражая линейно координаты вектора $\mathbf{r}$ через степени дуги s, s^2, s^3 путем обращения матрицы, получающейся из формул Френе, можно свести члены $\varphi(\mathbf{r})$ до третьей степени к линейным. Уравнения типа

$$d\mathbf{r}^2/dt^2 - \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(t)$$

приближенно сводятся к линейным векторным дифференциальным уравнениям путем применения

этого метода к малым участкам интегральной кривой. Освобождаясь от наложенного им ранее (J. Appl. Phys., 1950, **21**, 753—761) ограничения — гармоничности $\varphi(\mathbf{r})$, автор рассматривает движение материальной точки в поле тяготения Земли с учетом центробежной силы. *М. Л. Бродский*

1670. О соотношении между изменением фазы, уровнями энергии и потенциалом. Йост, Кон (On the relation between phase shift energy levels and the potential. Jost Res, Kohn Walter), Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fis. medd., 1953, **27**, № 9, 1—19 (англ.)

Изучается уравнение

$$\psi''(E, r) + E\psi(E, r) = V(r)\psi(E, r). \qquad (1)$$

На функцию $V(r)$ (потенциал) накладывается ограничение:

$$\int_0^\infty r|V(r)|\,dr < \infty.$$

Рассматриваются следующие решения уравнения (1):

$$\varphi(E, r)\colon \varphi(E, 0) = 0,\ \varphi_r'(E, 0) = 1;$$

$$f(k, r)\colon \lim_{r\to\infty} e^{ikr} f(k, r) = 1,\ E = k^2.$$

Авторы рассматривают тот случай, когда уравнение (1) имеет отрицательный спектр. В этом случае функция $\arg f(k, 0)$ не определяет потенциала однозначно. Однако из теоремы В. А. Марченко следует, что если, кроме функции $\arg f(k, 0)$, задать еще точки отрицательного спектра $E_1, \ldots, E_n$, а также числа

$$C_l = \int_0^\infty [\varphi(E_l, r)]^2\,dr,$$

то потенциал определяется однозначно (Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, 327—420). Авторы изучают характер зависимости потенциала $V(r)$ от чисел $E_1, \ldots, E_n$; $C_1, \ldots, C_n$. Для решения этого вопроса они использовали метод решения обратной задачи Штурма—Лиувилля, предложенный И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном (Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, **15**, 309—360; Докл. АН СССР, 1951, **77**, 557—560). Авторы начинают свое исследование с вывода формулы

$$\varphi(E, r) = \varphi_1(E, r) + \int_0^r K(r, t)\,\varphi_1(E, t)\,dt,$$

где $\varphi_1(E, r)$ соответствует потенциалу $V_1(r)$; затем получают для функции $K(r, t)$ интегральное уравнение, рассмотренное Гельфандом и Левитаном,

$$K(r, s) + g(r, s) + \int_0^r K(r, t)\,g(s, t)\,dt = 0, \qquad (2)$$

где

$$g(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(E, s)\,\varphi_1(E, t)\,d[\rho(E) - \rho_1(E)]$$

и $\rho(E)$, $\rho_1(E)$ суть спектральные функции для уравнений с потенциалами $V(r)$, соответственно $V_1(r)$.

Уравнение (2) дает возможность полностью исследовать поставленный выше вопрос. В конце работы указываются некоторые приложения к квантовой теории рассеивания. *Б. М. Левитан*

1671. О размерах водных масс, содержащих планктон. Кирстед, Слободкин (The size of water masses containing plankton blooms. Kierstead Henry, Slobodkin L. Basil), J. Marine Res., 1953, **12**, № 1, 141—147 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании критических размеров водных объемов, в которых еще может существовать концентрация планктона конечной величины. Процесс подчиняется уравнению диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Kc,$$

где D — коэффициент диффузии, K — скорость размножения планктона.

Задача разбирается на примерах одномерной и цилиндрически симметричной среды конечных размеров. Решения строятся в виде обычных рядов, экспоненциально зависящих от времени. Ограничиваясь первыми членами, из условия положительности показателя экспоненты авторы получают следующие выражения для критических размеров:

$L_K = \pi\sqrt{\frac{D}{K}}$ — для одномерного случая и

$R_K = \beta_0\sqrt{\frac{D}{K}}$, где $J_0(\beta_0) = 0$—для цилиндрически симметричного случая. *Ю. Н. Днестровский*

1672. Пространственная задача диффракции для электромагнитных колебаний. Авазашвили Д. З., Сообщ. АН Груз. ССР, 1953, **14**, № 6, 321—328

Решается задача об определении электромагнитного поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в слоистой среде с границами в виде регулярных поверхностей. Метод решения является распространением на трехмерные задачи метода В. Д. Купрадзе, изложенного в монографии «Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения» (Гостехиздат, М., 1950) для плоских задач.

Вначале ставится общая задача о диффракции, а затем делается ограничение в отношении магнитной проницаемости: предполагается, что $\mu_j = 1$ (для всех слоев).

Решение определяется в виде

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{F},\ \mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi + \frac{i\omega}{c}\mathbf{F},$$

причем потенциалы φ и $\mathbf{F}$ связаны зависимостью

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{c}{i\omega}k_j^2\varphi,$$

где k_j — постоянные, зависящие от частоты, диэлектрической постоянной и коэффициента проводимости соответствующего слоя.

Для потенциалов φ и $\mathbf{F}$ автор построил нагруженные интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода и тем самым доказал теорему существования. Теорема единственности была доказана автором в другой статье (Тр. Тбилисского мат. ин-та, 1940, 8, 109—134). *И. С. Аржаных*

1673. Анализ и расчет подводной связи для передачи энергии по однофазным отдаленным кабелям. Нассе (Analyse et calcul d'une liaison sous-marine de transmission d'énergie par cables unipolaires espacés. Nasse M. G.), Bull. Soc. franç. électr., 1953, **3**, № 30, 337—356 (франц.)

Для подводной передачи электрической энергии через пролив Па де Кале между Францией и Англией автор дает предпочтение системе трех отдаленных друг от друга однофазных кабелей вместо одного трехфазного кабеля. В работе рассмотрен стационарный процесс синусоидального переменного тока в этой системе кабелей.

В первой части статьи составлены по законам Ома и Кирхгофа и решены обыкновенные дифференциальные уравнения для комплексов напряжений и токов, причем учтены влияние свинцовых оболочек кабелей и взаимное влияние кабелей.

Во второй части получено выражение для взаимной индуктивности между кабелями с учетом свойств окружающей среды. С этой целью автор решает при конкретных условиях уравнения Максвелла, причем найденное выражение содержит цилиндрическую функцию K_1 с комплексными аргументами. В третьей части рассмотрен пример с данными численными значениями параметров. *Н. А. Бразма*

1674. Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний. Купрадзе В. Д., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 3 (55), 21—74

Излагаются основные результаты, полученные автором и частично его учениками, по вопросу об установившихся колебаниях изотропного упругого тела. Данная статья является сокращенным и переработанным вариантом монографии автора «Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения» (Гостехиздат, М.— Л., 1950).

Рассмотрены три вопроса: 1) элементарные решения уравнения

$$\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u + \omega^2 u = 0, \qquad (1)$$

2) потенциалы, связанные с оператором, стоящим слева, 3) интегральные уравнения краевых задач, относящихся к уравнению (1).

Изложение ведется на основе применения тензоров. Элементарные решения получены путем разложения вектора u на потенциальную и вихревую части. Вначале строятся элементарные решения нулевого рода. Заметим, что этот класс решений можно сразу получить из формул Стокса (Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ, М.— Л., 1935, 319), положив в формулах Стокса $\mathbf{u} = \mathbf{v}e^{-i\omega t}$, $\chi = 4\pi\rho e^{-i\omega t}$. Затем автор строит элементарные решения первого рода, применяя оператор

$$T \equiv 2\mu\frac{d}{d\nu} + \lambda\nu\operatorname{div} + \mu[\nu\operatorname{rot}], \qquad (2)$$

и элементарные решения второго рода, применяя оператор

$$N \equiv \frac{1}{\lambda+3\mu}\left\{2(\lambda+2\mu)\frac{d}{d\nu} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mu}(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)\nu\operatorname{div} + (\lambda+\mu)[\nu\operatorname{rot}]\right\}.$$

Строятся элементарные решения третьего рода, соответствующие тем, которые для статики ($\omega = 0$) построил Г. Вейль. Затем строятся формулы, аналогичные формулам Грина—Сомильяна. При этом вводятся потенциалы простого слоя, двойного слоя первого рода и потенциал объемных масс. Для анализа свойств потенциалов изучается поведение элементарных решений нулевого рода на бесконечности. При этом автор получает условия регулярности. Эта часть работы имеет существенное значение при доказательстве теорем единственности.

Во второй части работы изучаются свойства потенциалов. Поверхность, определяющая потенциалы простого и двойного слоя, предполагается гладкой, типа Ляпунова. Векторы плотности предполагаются непрерывными или удовлетворяющими условию Гёльдера. Формулируются теоремы о существовании в точках поверхности потенциалов, а также теорема о разрыве на поверхности потенциала двойного слоя. Выводятся формулы, определяющие этот разрыв. При помощи элементарных решений второго рода автор строит потенциал двойного слоя второго рода и формулирует теорему о разрывах в предположении непрерывности плотности. Различие в операторах T и N проявляется при исследовании TV и NV, где V — потенциал простого слоя. Теорема о разрывах TV формулируется в предположении, что плотность потенциала V удовлетворяет условию Гёльдера, а теорема о разрывах NV формулируется при условии, что плотность есть непрерывный вектор.

Применяя операторы T и N к потенциалам двойного слоя первого и второго рода, автор доказывает теорему, аналогичную теореме Ляпунова — Таубера о непрерывности нормальной производной ньютоновского потенциала двойного слоя. На плотность накладывается условие Гёльдера. Из работы автора не видно, при каких условиях существуют прямые значения производных TW и NW. При помощи элементарных решений третьего рода строится потенциал поверхностных масс, который называется потенциалом антенного слоя и формулируется теорема о разрыве операции TV в предположении, что плотность удовлетворяет условию Гёльдера. Для потенциала объемных масс доказана теорема, аналогичная теореме Пуассона. Для полного представления о поведении потенциала объемных масс недостает теоремы о непрерывности первых производных.

Кроме того, следует заметить, что часть теорем о поведении потенциалов простого и двойного слоя в статье лишь формулируется. При этом либо указывается на аналогию в доказательстве соответствующей теоремы из теории ньютоновских потенциалов, либо делается ссылка на монографию автора. Из работы автора неясно, при каких условиях существуют первые производные потенциалов V и W, и если прямые значения этих производных существуют, то какими формулами определяются разрывы.

В третьей части работы строятся интегральные уравнения граничных задач установившихся колебаний. В связи с тем, что потенциалы V и W удо-

влетворяют уравнению (1) и условиям регулярности, обеспечивающим единственность решений, оказывается возможным представить решение первой задачи в виде потенциала двойного слоя, а решение второй задачи — в виде потенциала простого слоя. Для каждой из этих задач (как внутренней, так и внешней) возможны два представления в соответствии с тем, что автор построил два типа потенциалов V и W.

Теоремы о разрывах приводят к интегральным уравнениям для вектора плотности. Характерной особенностью полученных интегральных уравнений является их регулярность. Поэтому автор называет свой метод «способом регулярных уравнений». Здесь дается всесторонний анализ интегральных уравнений трехмерных задач статики и динамики теории упругости. Рассмотрены и такие задачи, которые приводят к сингулярным интегральным уравнениям. В этом случае автор выполняет исследование своих уравнений на основе работы С. Г. Михлина (Усп. мат. наук, 1948, 3, № 3 (25), 29—112). Весь материал этой части представляет интерес для теории упругости.

Отметим также эффективное решение задачи о деформации упругой среды со вставленной шайбой под действием сосредоточенной силы.

И. С. Аржаных

1675. Решение смешанной краевой задачи теории упругости при помощи двойственных интегральных уравнений. Чжун (Solutions by dual integral equations of mixed boundary value problems in elasticity. Chong Frederick), Iowa State Coll. J. Sci., 1953, 27, № 2, 143—144 (англ.)

Рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство при отсутствии сил трения между штампом и упругой средой. Эта задача сводится к отысканию гармонической в полупространстве функции, когда на некоторой конечной области границы полупространства заданы значения искомой функции, а на остальной части границы нормальная производная этой функции равна нулю. Рассматривается осесимметричный случай в предположении, что в цилиндрических координатах уравнение боковой поверхности штампа имеет вид $z =$ полиному от r.

Рассмотрен также плоский аналог задачи о вдавливании штампа для случая ортотропной упругой среды; в этом случае при помощи преобразования Фурье задача сводится к «двойственному» интегральному уравнению вида

$$\int_0^\infty t^s f(t) J_p(ut)\, dt = g(u), \quad 0 < u < 1,$$

$$\int_0^\infty f(t) J_p(ut)\, dt = 0, \quad u > 1.$$

Как указывает автор, это уравнение решено Басбриджем (Busbridge) при условиях $s > -2$, $-p-1 < s - {}^1/_2 < p+1$. Значения параметров, соответствующие задачам о вдавливании штампа, не удовлетворяют последним неравенствам, однако в одном случае формула Басбриджа все же дает решение, а в другом автор решает уравнение иным способом.

Результаты Чжуна, хотя и полученные другими способами, содержатся в давно опубликованных работах. Автор ссылается на Буссине (Boussinesq), Лява (Love), Хардинга и Снеддона (Harding and Sneddon), тогда как на самом деле задача о вдавливании штампа в упругое полупространство имеет обширную литературу. История вопроса подробно изложена в статье В. И. Довноровича «Давление жесткого штампа на упругое полупространство» (Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., 1949, № 17), в которой дана довольно полная библиография; здесь мы перечислим только некоторые результаты.

Плоская задача о вдавливании штампа при отсутствии трения была весьма просто решена Н. И. Мусхелишвили (1935 г.), который рассматривал изотропную упругую среду; тот же метод пригоден и для среды неизотропной. При различных допущениях относительно характера сил трения ту же задачу рассматривали В. М. Абрамов (1935 г.), Н. И. Мусхелишвили (1935—1946 гг.), Л. А. Галин (1943—1945 гг.), С. В. Фалькович (1945 г.) и др. Задачу о вдавливании в упругое полупространство штампа, круглого в плане, решили А. И. Лурье (1941 г.) и Л. А. Галин (1946 г.), чем полностью перекрыты результаты Чжуна; более общие результаты получены также Л. А. Галиным (1947 г.) и В. И. Довноровичем (1949 г.). Теорема существования для упомянутой выше задачи теории гармонических функций была доказана еще в 1910 г. С. Зарембой (перевод его статьи см. Усп. мат. наук, 1946, 1, № 3—4 (13—14), 125—146).

С. Г. Михлин

1676 К. Задачи по уравнениям математической физики. Смирнов М. М., 72 стр., Гостехиздат, М., 1953

Целью задачника является иллюстрация теоретического материала курса «Дифференциальные уравнения математической физики», читаемого на физико-математических факультетах государственных университетов. Задачи снабжены достаточно подробными ответами, а многие — указаниями. Часть задач заимствована из книг А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики», Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина «Сборник задач по высшей математике», ч. 3 и Н. С. Кошлякова «Основные дифференциальные уравнения математической физики». В целом задачник будет весьма полезным для преподавателей и студентов.

А. Д. Мышкис

1677 Д. О существовании решения начальной задачи для некоторых линейных систем уравнений с частными производными. Харомонов С. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1953

1678 Д. Решение некоторых обратных и смешанных задач аэрогидромеханики. Чугунов В. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Казанский гос. ун-т, Казань, 1953

См. также: 1517—1519, 1648, 1653, 1679, 1680, 1682 Д, 1688, 1696, 1698, 1701 РЕЦ, 1711, 1712, 1810, 1811, 1813, 1827 РЕЦ; РЖМех 1953, 271, 273, 277, 289, 1049

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1679. О существовании решений интегро-дифференциальных уравнений. Женхэн О., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 6, 1261—1262

Доказывается, что интегральное уравнение

$$y(x) = f(x, \lambda \int_a^b K(x, t, y(t))\, dt) \qquad (1)$$

имеет при малых $|\lambda|$ по крайней мере одно решение, если: 1) функция $f(x, z)$ определена для $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < z < +\infty$ (или $|z| \leqslant M$), равномерно непрерывна по (x, z) и $|f(x, z)| \leqslant c$; 2) функция $K(x, t, y)$ определена для $a \leqslant x,\ t \leqslant b,\ |y| \leqslant c$, непрерывна по x, ограничена (или $|\lambda| \cdot |b - a| \max_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ |y| \leqslant c}} |K(x, t, y)| \leqslant M$) и измерима по t при постоянных y и непрерывна по y при постоянных t. Автор указывает, что можно доказать теорему о существовании при малых λ по крайней мере одного решения интегро-дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) = f(x,\ y(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)),$$
$$\lambda \int_a^b K(x,\ t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n)}(t))\, dt, \qquad (2)$$

удовлетворяющего начальным условиям $y^{(i)}(a) = y_{ia}$ $(i = 0,1, \ldots, n-1)$, если: 1) функция $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1}, z)$ определена для $a \leqslant x \leqslant b$, $|y_i| \leqslant c$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, $-\infty < z < +\infty$ (или $|z| \leqslant M$), равномерно непрерывна по совокупности переменных и $|f| \leqslant c$; 2) функция $K(x, t, y_0, \ldots, y_n)$ определена для $a \leqslant x, t \leqslant b, |y_i| \leqslant c$ $(i = 0,1, \ldots, n)$, непрерывна по x, ограничена (или $|\lambda| \cdot |b - a| \times \max_{\substack{a \leqslant x,\ t \leqslant b \\ |y_i| \leqslant c}} |K(x, t, y_0, \ldots, y_n)| \leqslant M$) и измерима по $T = (t, y_0, \ldots, y_{n-1})$ при постоянных y_n и непрерывна по y_n при постоянных T. Автор добавляет, что аналогичные теоремы существования решений имеют место для систем

$$y_i(x) = f_i(x, \lambda \int_a^b K_i(x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt),$$

$$y_i^{(m_j)}(x) = f_i(x, y_i^{(k_j)}, \lambda \int_a^b K_i(x, t, y_i^{(l_j)})\, dt),$$

$k_j = 0, \ldots, m_j - 1;\ l_j = 0, \ldots, m_j;\ i = 1, 2, \ldots, n.$

В. А. Щелкунов

1680. Математический расчет распределения температур в стеклянной плавке с учетом теплопроводности и теплоизлучения. Вальтер, Дёрр, Эллер (Mathematische Berechnung der Temperaturverteilung in der Glasschmelze mit Berücksichtigung von Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Walther Alwin, Dörr Johannes, Eller Edelgard), Glastechn. Ber., 1953, 26, № 5, 133—140 (нем.)

Рассматривается одномерная задача с искомым распределением температур $T(x)$ $(-a \leqslant x \leqslant a$, $x = -a$ — свободная поверхность плавки, $x = a$ — дно ванны), которое по Черному и Генцелю (Czerny M., Genzel L., Glastechn. Ber., 1952, 25, 387—392) удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям

$$k \int_{-a}^{a} T^4(z)\, \mathrm{Ei}(-k|x - z|)\, dz + 2T^4(x) - \lambda T''(x) =$$
$$= T_l^4 \mathrm{K}(-k(a + x)) + T_r^4 \mathrm{K}(-k(a - x)),$$

если свободную поверхность плавки (обогреваемую газовым пламенем) рассматривать как абсолютно черную излучающую стенку, и

$$k \int_{-a}^{a} T^4(z)\, \mathrm{Ei}(-k|x - z|)\, dz + k \int_{-a}^{a} T^4(z) \times$$
$$\times \mathrm{Ei}\left[-\frac{kn}{\sqrt{n^2 - 1}}(x + z + 2a)\right] dz + 2T^4(x) - \lambda T''(x) =$$
$$= T_l^4 \mathrm{K}(-k(a + x)) - T_l^4 \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \times$$
$$\times \mathrm{K}\left[-\frac{kn}{\sqrt{n^2 - 1}}(a + x)\right] + T_r^4 \mathrm{K}(-k(a - x)),$$

если полупространство $x < -a$ рассматривать как абсолютно черное излучающее тело. В обоих случаях дно $x = a$ рассматривается как абсолютно черная стенка. В этих уравнениях $\lambda = \frac{\varkappa}{2k\sigma n^2}$, $\varkappa$ — постоянный коэффициент теплопроводности, k — постоянный коэффициент поглощения, σ — постоянная закона Стефана—Больцмана, n — коэффициент преломления ($\approx 1{,}5$),

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt,\ \mathrm{K}(-x) = x\,\mathrm{Ei}(-x) + e^{-x}$$

$$T_l = T(-a)\ (= 1750°\mathrm{K}),\ T_r = T(a)\ (= 1450°\mathrm{K}).$$

В частных случаях $k = 0$ и $\varkappa = 0$ (т. е. $\lambda = 0$) задача сводится, соответственно, к дифференциальному и интегральному уравнениям, причем во втором случае получается уравнение

$$L[q] \equiv k \int_{-a}^{a} q(z)\, \mathrm{Ei}(-k|x - z|)\, dz + 2q(x) -$$
$$- q_l \mathrm{K}(-k(a + x)) - q_r \mathrm{K}(-k(a - x)) = 0,$$

линейное относительно $q(x) = T^4(x)$ $(q_l = T_l^4$, $q_r = T_r^4)$. Исследуются линейные приближения $q(x) = \alpha + \beta x$ решения этого уравнения, где α и β определяются из условий $L[q]|_{x=-a} = L[q]|_{x=a} = 0$. Устанавливается, что при $k \to \infty$ характер распределения температур приближается к такому, который имеет место в случае чистой теплопроводности, т. е. при $k = 0$, с той лишь разницей, что в последнем случае $T(x)$ — линейная функция, а в первом $T^4(x)$ стремится к линейной функции. Если

$T_l - T_r \ll T_m = \frac{1}{2}(T_l + T_r)$, то этим последним обстоятельством можно пренебречь, что позволяет линеаризировать данное интегро-дифференциальное уравнение в общем случае введением новой искомой функции $t(x) = T(x) - T_m$ и заменой $T^4(x)$ на $T_m^4 + 4T_m^3 t(x)$ (с максимальной ошибкой при заданных значениях температур в 4%). Линеаризированное уравнение сводится к системе 13 линейных уравнений с 13 неизвестными заменой интегралов суммами и производной — отношением приращений. Эта система решается (при $a = 50$ *см*, $\varkappa = 0{,}009375$ *кал·см*$^{-1}$*·сек*$^{-1}$*·град*$^{-1}$ и $k = 0{,}01$, $0{,}03, 1, 10$ *см*$^{-1}$, а также $k = 0{,}1$ и $\varkappa/0{,}009375 = 0{,}125$, 1, 2), и результаты представляются в виде 5 диаграмм, содержащих приближенные графики функции $T(x)$ при различных значениях параметров и разных краевых условиях. При $k \geqslant 1$ характер краевого условия для $x = -a$ не сказывается на распределении температур, при $k = 0{,}01$ он влияет очень сильно. Мало влияет на распределение температур также изменение $\varkappa$.

Никаких оценок точности получаемых приближений не приводится. *В. И. Левин*

1681. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Васильев В. В., Тр. Иркутского гос. ун-та, сер. физ.-мат., 1953, **8**, № 1, 22—27

Приводится метод приближенного решения уравнений

$$F(x, \varphi(x)) = \psi(x) + \lambda \int_a^b k(x, s) f(s, \varphi(s))\, ds,$$

где

$$f(s, \varphi(s)) = b_0(s)\varphi^n(s) + b_1(s)\varphi^{n-1}(s) + \ldots + b_{n-1}(s)\varphi(s) + b_n(s)$$

и

$$k(x, s) = \varphi_1(x)\psi_1(s) + \varphi_2(x)\psi_2(s) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(s).$$

В. В. Немыцкий

1682 Д. Об условиях существования периодических решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Яковлева Г. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Ин-т математики и механики АН Узб. ССР, Ташкент, 1953

См. также: 1672, 1674, 1675, 1717, 1823

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1683. Связь между теоремами существования минимума в неограниченной области. Транзю (Relazioni fra teoremi di esistenza del minimo in campi illimitati. Transue William), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **4**, № 34, 411—419 (итал.)

Рассматриваются условия существования абсолютного минимума интеграла

$$I[y] = \int F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

когда на допустимых кривых величины $x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ могут принадлежать неограниченной области $A^{(n)}$ при x, не выходящем за пределы фиксированного конечного интервала, полученные ранее Чинкуини (Cinquini S., Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1937, **6**, 191—209). Автор дает полное описание связи (равносильности, включения и независимости) критериев I—V статьи Чинкуини.

А. Г. Сигалов

1684. Пути распространения света в прозрачной среде. Существование неосвещенной области в поле точечного источника света. Бертолини (Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme. Bertolini Fernando), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 1, 26—28 (итал.)

Пусть $f(P)$ — функция, полунепрерывная снизу и неотрицательная на континууме $T \subset R^2$, ограниченная на каждой замкнутой части T, не содержащей точек $P_1, \ldots, P_\nu \in T$ и $f(P) \geqslant g(\overline{OP})$, где $g(t)$ непрерывна, неотрицательна и несуммируема в интервале $(0, \infty)$. Пусть Γ^* — класс непрерывных кривых в T, на которых каждая дуга, не содержащая точек $P_1, \ldots, P_\nu$, спрямляема. Для каждой спрямляемой кривой $L \in \Gamma^*$ положим

$$J(L) = \int_L f(P)\, ds$$

(интеграл Лебега — Стилтьеса, s — длина дуги кривой L) и для любой кривой $L \in \Gamma^*$ пусть

$$J(L) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} J(C_i) \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным конечным системам спрямляемых дуг $C_1, \ldots, C_n$ на L, соответствующих замкнутым интервалам изменения параметра, не имеющим, попарно, общих внутренних точек. Высказываются без доказательств следующие предложения:

1. Функционал $J(L)$ полунепрерывен снизу на классе Γ^*.

2. Если $f(P) > 0$ в $T - P_1 - \ldots - P_\nu$, то $J(L)$ достигает минимума в каждом замкнутом классе кривых из Γ^*, расстояние которых от начала не превосходит фиксированного числа H. Если $f(P) > 0$ в T, то кривая, на которой достигается минимум, спрямляема.

Эти результаты обобщают в известном направлении теоремы Тонелли (Tonelli L., Fondamenti

di calcolo delle variazioni. 1, 2, N. Zanichelli, Bologna), поскольку $f(P)$ не предполагается непрерывной, не налагается никаких ограничений на поведение $f(P)$ в окрестностях точек $P_1, \ldots, P_\nu$ и допустимые кривые не предполагаются спрямляемыми. Приводятся примеры, показывающие, что условие $f \geqslant g$ в теореме 2 не может быть отброшено.

А. Г. Сигалов

1685. Применение методов вариационного исчисления к решению некоторых задач земледельческой механики. Василенко П. М., Тр. Киевского с.-х. ин-та, 1953, 6, 133—150

1686. Гомологии пространства плоскостей и применение их к вариационному исчислению. Альбер С. И., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 6, 1237—1240

Новым методом вычислена группа Бетти пространства неориентированных двумерных плоскостей $(n+1)$-мерного евклидова пространства, проходящих через начало координат, и определены кольцо пересечений и длина того же пространства.

Автор, применяя полученные результаты к оценке числа замкнутых геодезических линий на многообразиях M^n, гомеоморфных n-мерной сфере и удовлетворяющих обычным в этих задачах ограничениям, и обобщая результаты Л. А. Люстерника, доказывает теорему:

На многообразии M^n существует по крайней мере $2n-1-s$ геометрически различных замкнутых геодезических, где $n = 2^k + s$, $s < 2^k$, k — целое число.

Л. Э. Эльсгольц

См. также: 1518, 1519, 1650, 1661, 1711, 1716

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1687. О формулировках теорем о конечных приращениях. Хаймович (Câteva moduri de prezentare a teoremei creşterilor finite. Haimovici Adolf), Gaz. mat. şi fiz., 1953, 5, № 5, 212—215 (рум.)

Функция

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

встречающаяся в доказательстве теоремы Лагранжа о конечном приращении, и аналогичная функция, из рассмотрения которой вытекает теорема Коши, представляются (с точностью до постоянного множителя) в виде определителей. Приводятся известные геометрические толкования утверждений теорем Лагранжа и Коши, а также механическое толкование теоремы Лагранжа: в любом промежутке времени найдется такой момент, в который скорость движения точки будет равна средней скорости на соответствующем отрезке.

В. И. Левин

1688. Теорема о среднем. Умадзава (平均値の定理の拡張について. 梅沢 敏夫), 數學 (Сугаку), 1953, 4, № 4, 34—36 (япон.)

Рассматривается система функций

$$\varphi(x) = 1, \quad \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x),$$

непрерывных на сегменте $[a, b]$ и n-кратно дифференцируемых в интервале (a, b). Далее, последовательно строятся функции

$$\varphi_k^{(i+1)}(x) = \frac{d\varphi_k^{(i)}(x)}{d\varphi_{i+1}^{(i)}(x)}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\varphi_k^{(0)}(x) = \varphi_k(x)$, и предполагается, что $[\varphi_{i+1}^{(i)}(x)]' \neq 0$ при $a < x < b$. Справедливо следующее предложение.

Теорема. Если $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$ и $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и n-кратно дифференцируема при $a < x < b$, то существует число $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ такое, что

$$\frac{|1\ \varphi_1(x_i) \ldots \varphi_{n-1}(x_i)\ f(x_i)|_{i=1,2,\ldots,n+1}}{|1\ \varphi_1(x_i) \ldots \varphi_{n-1}(x_i)\ \varphi_n(x_i)|_{i=1,2,\ldots,n+1}} =$$

$$= \frac{d^n f(\xi)}{d\varphi_1(\xi)\, d\varphi_2^{(1)}(\xi) \ldots d\varphi_n^{(n-1)}(\xi)}, \quad (1)$$

где числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части равенства (1), представляют собой соответствующие определители.

2. Полагая в формуле (1)

$$\varphi_i(x) = \frac{f_{i+1}(x)}{f_1(x)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } f(x) = \frac{g(x)}{f_1(x)},$$

будем иметь:

$$\frac{|f_1(x_i)\, f_2(x_i) \ldots f_n(x_i)\, g(x_i)|_{i=1,2,\ldots,n+1}}{|f_1(x_i)\, f_2(x_i) \ldots f_n(x_i)\, f_{n+1}(x_i)|_{i=1,2,\ldots,n+1}} =$$

$$= \frac{W[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi), g(\xi)]}{W[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi), f_{n+1}(\xi)]}, \quad (2)$$

где W — соответствующие определители Вронского; при этом должны быть выполнены условия:

$$W_k(x) = W[f_1(x), \ldots, f_k(x)] \neq 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

при $a < x < b$.

3. Если функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ являются линейно независимыми решениями линейного дифференциального уравнения

$$L[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + \psi_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + \psi_n(x)\, y(x) = 0,$$

то из формулы (2) получаем:

$$\frac{|f_1(x_i)\, f_2(x_i) \ldots f_n(x_i)\, g(x_i)|_{i=1, 2, \ldots, n+1}}{|f_1(x_i)\, f_2(x_i) \ldots f_n(x_i)\, f_{n+1}(x_i)|_{i=1, 2, \ldots, n+1}} = \frac{W_n(\xi)}{W_{n+1}(\xi)}\, L[g(\xi)]. \quad (3)$$

Этот результат обобщает известную теорему Полиа (Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, ч. 2, ОНТИ, М. — Л., 1938, 61).

Б. П. Демидович

1689. Доказательство формулы Тейлора. Вулф (A proof of Taylor's formula. Wolfe James), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 6, 415 (англ.)

1690. О некоторых функциях, встречающихся в теории оболочек. Ахунд-заде М. Ю., Докл. АН Азерб. ССР, 1953, 9, № 7, 385—390 (русск.; резюме азерб.)

Рассматриваются некоторые вопросы, связанные с табулированием равномерно и абсолютно сходящихся рядов

$$C_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!\, \Gamma(2m + n + 1)},$$

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m + 1)!\, \Gamma(2m + n + 2)},$$

исследованных И. Н. Векуа (Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1948, 202).

Показывается, что таблицы функций $C_n(x)$ и $S_n(x)$ можно составить при помощи таблиц бесселевых функций.

Отмечается, что функции, родственные функциям $C_n(x)$ и $S_n(x)$, играют роль при исследовании пологих цилиндрических оболочек.

Ш. Е. Микеладзе

1691. Ряды обратных факториалов. Смит (Inverse factorial series. Smith R. C. T.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 14, 132—135 (англ.)

Доказывается теорема: если ряд

$$A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!\, a_m}{\Gamma(z + m + 1)}$$

таков, что $\sum 2^m |a_m| < +\infty$, то он сходится для всех z и

$$A(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A(-r)}{r!\, (z + r)}.$$

В качестве примера приводится формула

$$\left(\frac{1}{2}\, x\right)^{-\nu} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\, x\right)^r J_r(x)}{r!\, (\nu + r)}.$$

И. П. Натансон

1692. Об одном асимптотическом разложении. Ван Вейнгарден (On a certain asymptotic expansion. Van Wijngaarden), Quart. Appl. Math., 1953, 11, № 2, 244—246 (англ.)

Решение некоторых физических задач связано с изучением поведения функции $f(z)$, которая может быть представлена в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\, k!\, k^{1/2}}, \quad (1)$$

при больших положительных значениях ее аргумента z.

В заметке рассматривается вопрос о нахождении асимптотического разложения этой функции. Автор исходит при этом из аналогии, существующей между рядом (1) и разложением в ряд функции Бесселя мнимого аргумента

$$I_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p}}{k!\, (k + p)!}. \quad (2)$$

Показывается, что $f(z)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{s - \frac{1}{2}}{s} B_s^{\left(s+\frac{1}{2}\right)} \times \left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-s-\frac{1}{2}} I_{s+\frac{1}{2}}(z) - \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)!}\right\}. \quad (3)$$

Входящие в разложение (3) функции Бесселя порядка $s + \frac{1}{2}$ выражаются, как известно, через гиперболические и степенные функции. Автор приводит явные выражения этих функций для первых шести значений индекса s, а также численные величины коэффициентов, стоящих в (3) между знаком суммы и фигурной скобкой.

Асимптотическое разложение функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) \sim \frac{e^z}{z\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{41}{32}\, \frac{1}{z^2} + \frac{445}{128} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{26571}{2048}\, \frac{1}{z^4} + \frac{505029}{8192}\, \frac{1}{z^5} + \ldots\right). \quad (4)$$

В формуле (4) в оригинале имеется опечатка.

Б. Р. Левин

1693. Заметка об обобщенном интеграле Френеля. Клеммов, Синьор (A note on a genera-

lized Fresnel integral. Clemmow P. C., Senior T. B. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 570—572 (англ.)

В теории распространения радиоволн встречается интеграл

$$G(a, b) = be^{ia^2}\int_a^\infty \frac{e^{-i\lambda^2}}{\lambda^2 + b^2}\, d\lambda$$

(при комплексных a и b), который можно считать обобщением известного интеграла Френеля

$$F(a) = e^{ia^2}\int_a^\infty e^{-i\lambda^2}\, d\lambda.$$

Путь интегрирования для G наперед не фиксируется, в связи с чем, по теореме о вычетах, в формулах появляется член δ, равный кратному $\pi e^{i(a^2+b^2)}$.

Авторы, пользуясь уже существующими таблицами для интегралов Френеля, устанавливают ряд равенств, связывающих интегралы G и F и позволяющих осуществить вычисление интегралов G.

В предположении, что вещественные части a и b положительны, выводятся формулы

$$G(a, b) + G(b, a) = 2iF(a)\,F(b) + \delta;$$

$$G(a, b) = \frac{b}{a}\{1 - 2iaF(a)\} -$$

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^3\{1 - 2ia^2 - 4a^3F(a)\} + O\left(\left|\frac{b}{a}\right|^5\right) + \delta$$

(если $|a| > |b|$). Для больших $|a^2 + b^2|$ дается асимптотическая формула

$$G(a, b) \sim \frac{b}{a^2 + b^2}\, F(a).$$

В заключение приводится обзор таблиц для F.

Г. М. Фихтенгольц

1694. Два двойных гипергеометрических интеграла. Слейтер (Two double hypergeometric integrals. Slater L. J.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 14, 127—131 (англ.)

Контурным интегрированием выводятся формулы:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(s, t)\, ds\, dt =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{A}\sum_{\nu=1}^{C}\Big\{\Gamma(-a_\mu, -c_\nu) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((b) + a_\mu)_m\,((d) + c_\nu)_n\,(1 - (e) + a_\mu)_m}{(1 + a_\mu - (a))_m\,(1 + c_\nu - (c))_n} \times$$

$$\times \frac{(1 - (g) + c_\nu)_n\,(1 - (j) + a_\mu + c_\nu)_{m+n}}{((f) + a_\mu)_m((h) + c_\nu)_n\,((k) + a_\mu + c_\nu)_{m+n}} \times$$

$$\times (-1)^{(A+E+J)m+(C+G+J)n}\Big\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{B}\sum_{\nu=1}^{D}\Big\{\Gamma(b_\mu, d_\nu) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((a) + b_\mu)_m\,((c) + d_\nu)_n\,(1 - (f) + b_\mu)_m}{(1 + b_\mu - (b))_m\,(1 + d_\nu - (d))_n} \times$$

$$\times \frac{(1 - (h) + d_\nu)_n\,(1 - (k) + b_\mu + d_\nu)_{m+n}}{((e) + b_\mu)_m((g) + d_\nu)_n\,((j) + b_\mu + d_\nu)_{m+n}} \times$$

$$\times (-1)^{(B+F+K)m+(D+H+K)n}\Big\},$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a + 1)\ldots(a + n - 1)$,

$$((b) + a_\mu)_m = \prod_{\lambda=1}^{B}(b_\lambda + a_\mu)_m,$$

и т. д. (вообще предполагается, что имеется A параметров a, B параметров b и т. д.),

$$\Gamma(s, t) =$$

$$= \prod_{\varkappa=1}^{A}\Gamma(a_\varkappa + s)\prod_{\lambda=1}^{B}\Gamma(b_\lambda - s)\prod_{\mu=1}^{C}\Gamma(c_\mu + t)\prod_{\nu=1}^{D}\Gamma(d_\nu - t) \times$$

$$\times\Big[\prod_{\varkappa=1}^{E}\Gamma(e_\varkappa + s)\prod_{\lambda=1}^{F}\Gamma(f_\lambda - s)\prod_{\mu=1}^{G}\Gamma(g_\mu + t) \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^{H}\Gamma(h_\nu - t)\prod_{\rho=1}^{J}\Gamma(j_\rho + s + t)\prod_{\sigma=1}^{K}\Gamma(k_\sigma - s - t)\Big]^{-1}.$$

Сходимость интеграла обеспечена при выполнении некоторых соотношений между параметрами a, b, ... и их количествами A, B, ...

Аналогичные формулы выводятся еще для одного гипергеометрического интеграла подобного вида.

В. И. Левин

1695. Замечание об интеграле Эйри. Бадден (A note on the Airy-integral function. Budden K. G.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 574—577 (англ.)

Автор показываст, что интенсивность света, проходившего через цилиндрическую линзу, можно выразить при помощи интеграла Эйри

$$\mathrm{Ai}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(az + \frac{1}{3}z^3\right)dz.$$

Указаны также некоторые другие задачи, при решении которых приходится встречаться с этим интегралом.

Э. Я. Риекстыньш

1696. Об одном классе ортогональных многочленов. Лащенов К. В., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, **89**, 167—189

Пусть $w(x) \geqslant 0$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ — четная функция, имеющая моменты всех порядков. Положим

$$w_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}w(\sqrt{t}),\quad w_2(t) = t^{1/2}w(\sqrt{t})\ (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

и пусть $\{S_n^{(1)}(t)\}$ — полная ортонормированная последовательность многочленов относительно веса $w_1(t)$, а $\{S_n^{(2)}(t)\}$ — аналогичная последовательность относительно веса $w_2(t)$. В таком случае, что немедленно проверяется, многочлены

$$S_n(x) = \begin{cases} xS_k^{(2)}(x^2) & (n = 2k+1) \\ S_k^{(1)}(x^2) & (n = 2k) \end{cases}$$

образуют полную ортонормированную систему относительно веса $w(x)$ в интервале $[-1, 1]$. Следовательно, свойства системы $\{S_n(x)\}$ непосредственно получаются из соответствующих свойств систем $\{S_n^{(1)}(t)\}$, $\{S_n^{(2)}(t)\}$. Такое перенесение свойств применительно к случаю $w(x) = (1-x^2)^p |x|^q$ ($p > -1$, $q > -1$) и изучается в реферируемой статье.

Н. И. Ахиезер

1697. Об одном свойстве корней полиномов Якоби. Егорова И. А., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, 89, 153—159

Рассматриваются корни $x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)}$ многочлена Якоби $P_n(x, \alpha, \beta)$. Полагая $N = \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2}$ и $N(\theta_{k+1}^{(n)} - \theta_k^{(n)}) - \pi = \alpha_k^{(n)}$, автор доказывает, что при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ и $|\beta| < \frac{1}{2}$ будет $|\alpha_1^{(n)} + \ldots + \alpha_k^{(n)}| < A$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Если же $\alpha = \beta$ и $|\alpha| < \frac{1}{2}$, то $|\alpha_1^{(n)}| + \ldots + |\alpha_{n-1}^{(n)}| = O(1)$. *И. П. Натансон*

1698. О полноте системы гармонических полиномов в пространстве. Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1953, 90, № 4, 495—498

Пусть S — поверхность Ляпунова в трехмерном пространстве, а D_i — область, ограниченная S снаружи. Обозначим через $\{V_n(x, y, z)\}$ последовательность ортонормальных относительно S гармонических полиномов, полученную в результате ортогонализации из системы шаровых функций $r^n P_{nm}(\cos\theta)\cos\varphi$, $r^n P_{nm}(\cos\theta)\sin\varphi$ $(m \leqslant n)$. Доказывается полнота и замкнутость системы $\{V_n\}$ на S.

Далее при помощи рассмотрения функции Грина задачи Дирихле в области D_i изучается сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(P)\, V_n(Q)$$

при $P \in D_i$, $Q \in D_i + S$. Это дает возможность получить представление гармонической в D_i функции $U(P)$, принимающей на границе непрерывные значения $f(M)$ $(M \in S)$, в виде суммы ряда

$$U(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, V_n)_S V_n(P) \quad (P \in D_i),$$

который сходится абсолютно и равномерно внутри D_i.

В заключение доказывается, что всякую непрерывную в $D_i + S$ и гармоническую в D_i функцию можно в $D_i + S$ представить в виде равномерно сходящегося ряда гармонических полиномов; это предложение является усилением теоремы, доказанной ранее М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (Тр. Тбилисского мат. ин-та, 1937, 1, 163). Автор указывает, что результаты можно обобщить на случай многосвязной (конечной или бесконечной) области и на многомерные пространства; в случае плоскости эти результаты хорошо известны. *А. Д. Мышкис*

1699 К. Курс высшей математики. Смирнов В. И., Т. I, 472 стр., изд. 14-ое, Гостехиздат, М., 1953, 13 р. 20 к.; Т. II, 627 стр., изд. 12-ое, стереотипное, Гостехиздат, М., 1953, 17 р. 10 к.

Курс математического анализа В. И. Смирнова, два первых тома которого вышли в свет очередным изданием, допущен в качестве учебника для физико-математических факультетов государственных университетов и втузов с расширенной программой.

Содержание томов:

Том I. Гл. 1. Переменные величины и функциональная зависимость. Гл. 2. Теория пределов. Понятие производной и его приложения. Гл. 3. Понятие об интеграле и его приложения. Гл. 4. Ряды и их приложения к приближенному вычислению функций. Гл. 5. Функции многих переменных. Гл. 6. Комплексные числа, начала высшей алгебры и интегрирование функций.

Том II. Гл. 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гл. 2. Линейные дифференциальные уравнения и дополнительные сведения по теории дифференциальных уравнений. Гл. 3. Кратные и криволинейные интегралы. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. Гл. 4. Векторный анализ и теория поля. Гл. 5. Основы дифференциальной геометрии. Гл. 6. Ряды Фурье. Гл. 7. Уравнения с частными производными математической физики.

Отличительными чертами курса являются широкий охват математического материала, устремление к приложениям математики, особенно к таким, которые послужили в свое время толчком для развития классического анализа, равновесие между математической абстракцией и математической конкретностью.

Вопросы обоснований не находятся в фокусе зрения автора, но в своем изложении он не допускает послаблений в ущерб подлинной строгости. Надо лишь признать, что эта строгость не мешает читателю вследствие умелого использования петита (в особенности в начале курса).

Следует отметить своеобразную методологическую особенность книги: в ней избегнут прием сведения понятия предела функции к понятию предела числовой последовательности. *В. Л. Гончаров*

1700 РЕЦ. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Rothe R., Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1952) [**Рецензия: Шаллер** (Schaller W.), Energietechnik, 1953, 3, № 2, 96 (нем.)]

1701 РЕЦ. Дополнительные разделы математики для инженеров-специалистов по электротехнике

и связи. Анго (Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications. Angot André, préface de Louis de Broglie, 2 ed., pp. VIII + + 688, fig. 324, Paris, Editions de la Revue d'optique, 1952, 57 Fr.) [**Рецензия: Лангенбергер** (Langenberger A.), Techn. Mitt. P. T. T., 1953, **31**, № 5, 143—144 (франц.)]

Автор ставит своей целью в доступной и наглядной форме без излишней строгости познакомить инженеров с методами современной математики и ее приложениями к вопросам электротехники.

Книга состоит из 9 глав. Глава 1: теория функций комплексного переменного и приложения ее к электротехнике. Глава 2: теория рядов Фурье и интеграла Фурье. Глава 3: векторное исчисление; здесь же частично затрагиваются вопросы математической физики. Глава 4: матричное исчисление и его приложения к дифференциальным уравнениям. Глава 5: основные понятия тензорного анализа и его приложения. Глава 6: методы точного и приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, включая уравнения в частных производных. Глава 7: некоторые специальные функции (синус и косинус-интегралы, интеграл ошибок, функции Бесселя, Лежандра, Матью и др.). Глава 8: операционные методы и их приложения к задачам электрических цепей. Глава 9: основы теории вероятностей и ее приложения к вопросам автоматики и телефонии.

Отмечается, что книга является ценным пособием для инженера-электротехника.

Б. П. Демидович

1702 **РЕЦ. Основания классического анализа. Фогель** (Klassische Grundlagen der Analysis. Vogel Alfred, S. X + 194, 17 Abb., Leipzig, S. Herzel-Verlag, 1952, 8.50 DM) [**Рецензия: Марун** (Maruhn), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 5/6, 217—218 (нем.)]

1703 **РЕЦ. Введение в высшую математику. Асмус** (Einführung in die höhere Mathematik. Asmus E., S. 404, Abb. 178, Verlag Walter de Gruyter, B., 1951, 22 DM) [**Рецензия: Хазе** (Haase G.), Umschau, 1953, **53**, № 9, 286 (нем.)]

1704 **РЕЦ. Высшая математика для физиков и инженеров. Бронуэлл** (Advanced mathematics in physics and engineering. Bronwell Arthur, pp. 475, Mc Graw-Hill Book Co., N. Y., 1953, 6.00 doll.) [**Рецензия: Платцер** (Platzer H. L.), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 5, 464—465 (англ.)]

1705 **РЕЦ. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г. Н.,** под. ред. проф. А. Ф. Бермана, изд. второе, переработанное и дополненное, 528 стр., Гостехиздат, 1951 [**Рецензия: Садовский Л. Е.,** Усп. мат. наук., 1953, **8**, № 4(56), 201—207]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1706. **О суммировании одного класса двойных последовательностей. Алхимов М.,** Научн. зап. Днепропетровского гос. ун-та, 1953, **41**, 137—143

Рассматриваются преобразования числовых двойных последовательностей $\{S_{ik}\}$, осуществляемые при помощи двух треугольных матриц

$(A) = \| a_{ik} \|$ $(i = 0, 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots, i)$ и

$(B) = \| b_{ik} \|$ $(i = 0, 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots, i)$

$$(A)\quad \begin{array}{l} a_{00} \\ a_{10}\ a_{11} \\ a_{20}\ a_{21}\ a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m0}\ a_{m1} \ldots a_{mm} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$(B)\quad \begin{array}{l} b_{00} \\ b_{10}\ b_{11} \\ b_{20}\ b_{21}\ b_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{m0}\ b_{m1} \ldots b_{mm} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

по формуле

$$\sigma_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{mi}\, b_{nk} S_{ik}.$$

Двойная последовательность $\{S_{ik}\}$ называется $\{AB\}$-суммируемой к значению S, если двойная последовательность $\{\sigma_{mn}\}$ сходится к S.

В работе изучены условия суммирования двойных числовых последовательностей методом $\{AB\}$ для случая горизонтальной (вертикальной, латеральной) сходимости.

Двойная последовательность $\{S_{ik}\}$ называется горизонтально сходящейся к значению S, если существует целочисленная положительная функция $\varphi(k)$, стремящаяся к бесконечности при $k \to \infty$, такая, что

$$\lim_{[k,\, \varphi(k) < i] \to \infty} S_{ik} = S,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое $N > 0$, что

$$|S_{ik} - S| < \varepsilon, \text{ когда } k > N,\ i > \varphi(k).$$

Доказывается следующая основная теорема:

Горизонтально сходящаяся двойная последовательность $\{S_{ik}\}$ тогда и только тогда горизонтально $\{AB\}$-суммируема, если существует положительная целочисленная функция $\varphi(n)$, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, такая, что

$$\overline{\lim_{[n,\, \varphi(n) < m] \to \infty}} |\sigma_{mn}| < \infty.$$

В. Г. Челидзе

1707. О сильной суммируемости двойных последовательностей. Кильберг Е. М., Научн. зап. Днепропетровского гос. ун-та, 1953, **41**, 153—163

Рассматривается бесконечная двойная последовательность матриц с комплексными членами:

$$\| c_{mn}^{ik} \| \equiv \begin{Vmatrix} c_{mn}^{00} & c_{mn}^{10} \cdots c_{mn}^{m0} \\ c_{mn}^{01} & c_{mn}^{11} \cdots c_{mn}^{m1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{mn}^{0n} & c_{mn}^{1n} \cdots c_{mn}^{mn} \end{Vmatrix} \quad 0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Пусть p — некоторое положительное число. Двойная последовательность $\{S_{ik}\}$ называется сильно суммируемой порядка p при помощи данной матрицы к комплексному числу S, если двойная последовательность $\{\sigma_{mn}\}$ сходится к нулю, где

$$\sigma_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} c_{mn}^{ik} \left| S_{ik} - S \right|^p.$$

Если каждая сходящаяся двойная последовательность $\{S_{ik}\}$ сильно суммируема к своему пределу, то данная матрица $\| c_{mn}^{ik} \|$ называется сильно регулярной. Матрица $\| c_{mn}^{ik} \|$ называется матрицей типа «u», если из сильной суммируемости любой двойной последовательности $\{S_{ik}\}$ к S, следует, что S — единственное число.

Доказываются теоремы, дающие необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица $\| c_{mn}^{ik} \|$ была сильно регулярной (матрицей типа «u»).

В. Г. Челидзе

1708. Суммирование некоторых классов расходящихся произведений. Слепенчук К. М., Научн. зап. Днепропетровского гос. ун-та, 1953, **41**, 169—174

Пусть бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$$

преобразуется при помощи матрицы $A = \| a_{nk} \|$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$ существует при $k = 1, 2, \ldots$, в

$$P_n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_{nk} u_k) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если последовательность $\{P_n\}$ сходится к конечному отличному от нуля пределу P, то бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$$

называют суммируемым (A) к значению P.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Для того, чтобы любое бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k),$$

для которого $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, было суммируемо ($A$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | < M,$$

где M не зависит от n. При этих условиях

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_{nk} u_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k u_k). \qquad (1)$$

Теорема 2. Для того, чтобы любое бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k),$$

для которого $| u_k | < A$, было суммируемо (A), необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} |$$

сходился равномерно относительно n. При этих условиях имеет место равенство (1). *В. Г. Челидзе*

См. также: 1518, 1602, 1605, 1615, 1617, 1673, 1835

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1709. Функции на локально компактных группах. Маккей Д. В. (перевод с англ. Н. Я. Виленкина), Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 4 (56), 95—129

Перевод Н. Я. Виленкина статьи Маккея (Mackey George W., Bull. Amer. Math. Soc., 1950, **56**, 385—412.

Обзорная статья, посвященная теории унитарных представлений локально компактных групп и кругу вопросов, связанных с этой теорией. Статья состоит из четырех глав и приложения.

В главе I изложена связь между теорией представлений групп линейными преобразованиями и гармоническим анализом. Как известно, в этих вопросах существенную роль играют различные классы функций на группе, главным образом, гильбертово пространство $L^2(G)$ функций с интегрируемым квадратом и кольцо $L^1(G)$ суммируемых функ-

ций на группе; в главе I дано определение классов $L^2(G)$ и $L^1(G)$.

В главе II рассматривается случай компактной группы. Автор излагает теорему Петера—Вейля и выводит из этой теоремы формулу, обобщающую на случай компактных групп известное в теории рядов Фурье равенство Парсеваля. Кроме того, в главе II излагаются основные результаты построенной Нейманом теории почти периодических функций на локально компактной группе.

Глава III посвящена абелевым группам, главным образом гармоническому анализу на топологических абелевых группах, в связи с понтрягинской теорией двойственности, с одной стороны, и с теорией нормированных колец И. М. Гельфанда, с другой. Автор указывает на некоторые нерешенные полностью вопросы, в частности, на вопросы о строении инвариантных по отношению к сдвигам подпространств в $L^1(G)$ и излагает основные результаты Сегала, Л. Шварца, Годемана и И. Капланского по этому вопросу. В заключение главы III реферируются работы автора и И. М. Гельфанда и Лорана Шварца, относящиеся в основном к нерешенному вопросу о максимальных идеалах в различным образом нормированных кольцах функций и связи этого вопроса с обобщенным преобразованием Лапласа.

В главе IV автор дает сначала краткий обзор теории И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова положительно определенных функций на группе и основанного на этой теории доказательства их теоремы о полноте системы всех неприводимых унитарных представлений локально компактных групп; кроме того, реферируются работы Годемана, посвященные дальнейшему развитию теории положительно определенных функций.

Далее рассматривается вопрос о разложении унитарного представления локально компактной группы на неприводимые представления; излагается основной результат Неймана о разложении представления на фактор-представления и результаты Маутнера о зависимости от класса фактора характера дальнейшего разложения фактор-представления на неприводимые представления. Автор указывает на отсутствие дуального объекта для произвольной локально компактной группы, аналогичного дуальному объекту для абелевой или компактной группы, хотя для комплексных классических групп такие дуальные объекты построены И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком, а для «вполне непрерывно представляемых групп» — Капланским.

Излагается теорема И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, обобщающая на случай комплексной унимодулярной группы формулу Планшереля, а также различные обобщения этой теоремы, принадлежащие Капланскому, Годеману и Сегалу. В заключение главы IV дается краткий обзор работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, относящихся к определению неприводимых унитарных представлений комплексной унимодулярной группы, работ Баргмана и Хариш — Чандра, посвященных частному случаю этой задачи, и работ автора по теории «импримитивных» представлений. В приложении автор кратко реферирует работы, появившиеся после того, как статья им была сдана в печать.

К статье прилагается дополнение переводчика, в котором дан обзор работ, появившихся после опубликования статьи. *М. А. Наймарк*

1710. Произведения нормальных операторов. Капланский (Products of normal operators. Kaplansky Irving), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 257—260 (англ.)

Выясняются условия, при которых из нормальности операторов A, B и AB в гильбертовом пространстве можно заключить о нормальности оператора BA.

Основные результаты:

1. Если A, B и AB нормальны, то следующие утверждения эквивалентны: а) B перестановочен с A^*A; б) BA нормален.

2. Пусть а) A, B и AB нормальны; б) A имеет чисто точечный спектр; в) собственные подпространства оператора A^*A конечномерны, за исключением, может быть, подпространства, отвечающего одному собственному значению α, г) всякое множество собственных значений оператора A^*A, не состоящее из одного только α, имеет максимум или минимум, отличный от α. Тогда BA нормален.

Автор строит пример нормальных операторов A, B таких, что AB нормален, а BA ненормален.

Автору, повидимому, неизвестны работа Ф. Р Гантмахера и М. Г. Крейна (Изв. Казанского физ. мат. об-ва, 1929—1930, сер. 3, **4**, 71—84), где дано необходимое и достаточное условие нормальности произведения двух нормальных операторов в конечномерном пространстве, и работа референта (Тр. Одесского гос. ун-та, 1938, **2**, 13—28), где аналогичное условие дано для операторов в гильбертовом пространстве, если один из операторов вполне непрерывен. Эти работы были, вероятно, также неизвестны и другим авторам, занимавшимся этим вопросом (Fuglede B., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 1950, **36**, 35—40; Putnam C. R., Amer. J. Math., 1951, **73**, 357—362; Wermer J., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 270—277; Wiegmann N. A., Duke Math. J., 1948, **15**, 633—638; 1949, **16**, 535—538).

М. А. Наймарк

1711. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. Слободянский М. Г., Докл. АН СССР, **91**, № 4, 733—736

Дается способ преобразования проблемы минимума квадратичного функционала в проблему максимума некоторого другого функционала; этот способ представляет собой некоторое обобщение известного способа Фридрихса. Пусть A — самосопряженный положительно определенный оператор с областью определения M. Если $u_0 \in M$ и $Au_0 = f$, то u_0 реализует минимум функционала $F_f^A(u) = (Au, u) - 2(u, f)$.

Допустим, что

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

где каждый из операторов A_i самосопряженный и положительно определенный в своей области определения $M_i \supset M$. Доказывается, что функционал

$$H = \sum_{i=1}^{n} (A_i u_i, u_i),$$

где $u_i \in M_i$

и

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i = f,$$

достигает минимума при $u_i = u_0$ и $\min H = -\min F_f^A(u)$. Можно положить, например, $A = A_1 + A_2$, $A_1 u = Au - cu$, $A_2 u = cu$, где $c > 0$ — постоянная, меньшая, чем нижняя грань оператора A. Тогда

$$H = (Au_1 - cu_1, u_1) + \frac{1}{c} \| f - Au_1 + cu_1 \|^2;$$

здесь u_1 — произвольный элемент области M.

Как частный случай рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Au = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right] = f(x),$$

$$p_k(x) > c_k > 0,$$

при краевых условиях $u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Здесь можно положить

$$A_k u_k = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u_k}{dx^k} \right],$$

$$u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Тогда

$$H = \int_a^b \sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k u_k}{dx^k} \right)^2 dx,$$

где u_k должны быть связаны соотношением

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u_k}{dx^k} \right] = f(x).$$

С. Г. Михлин

1712. Спектр гармонического осциллятора. Мак Шейн (The spectrum of the harmonic oscillator. McShane E. J.), Virginia J. Sci., 1953, 4, № 1, 7—10 (англ.)

Пусть P и Q — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве такие, что любой элемент φ из области определения оператора $H = {}^1/_2(P^2 + Q^2)$ принадлежит также области определения операторов P, Q, PQ и QP и для него $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$. Доказывается, что в таком случае спектр оператора H обязательно будет чисто точечным и будет состоять из чисел ${}^1/_2$, ${}^3/_2$, ${}^5/_2$,... Сложность задачи заключается в необходимости строгого доказательства того, что спектр будет чисто точечным; если это предположить известным, то тот факт, что он будет состоять из указанных чисел, может быть доказан очень просто (см., например, Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, ОНТИ, М.— Л., 1937). *А. М. Яглом*

1713. Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования. Сигал (A non-commutative extension of abstract integration. Segal I. E.), Ann. Math., 1953, 57, № 3, 401—457 (англ.)

Пусть $\mathfrak{H}_R$ — гильбертово пространство функций с интегрируемым квадратом на некотором пространстве R с мерой dr и пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо всех операторов умножения на существенно ограниченные измеримые (относительно dr) функции $f(x)$, $x \in R$. Как известно, всякое слабо замкнутое коммутативное кольцо операторов в гильбертовом пространстве алгебраически изоморфно некоторому кольцу $\mathfrak{R}$; исходя из этого можно дать интегралу функции $f(x)$ (по всему пространству R) определение, инвариантное по отношению к алгебраическому изоморфизму колец.

Это обстоятельство использовано автором для обобщения понятия интеграла на произвольные, вообще некоммутативные, слабо замкнутые кольца $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом (вообще несепарабельном) пространстве $\mathfrak{H}$. При этом роль меры, по которой производится интегрирование, играет функция $m(P)$, определенная на операторах проектирования $P \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющая условиям: 1) $m(P) \geqslant 0$, $m(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$; 2) $m(U^* PU) = m(P)$ для всех унитарных операторов $U \in \mathfrak{A}$; 3) $m\left(\sum_\alpha P_\alpha\right) = \sum_\alpha m(P_\alpha)$, если операторы P_α взаимно ортогональны.

Оператор проектирования $P \in \mathfrak{A}$ автор называет метрически конечным (относительно меры m), если число $m(P)$ конечно, и метрически бесконечным, если $m(P) = \infty$.

Автор вводит понятие измеримости оператора по отношению к кольцу; при этом все ограниченные операторы, принадлежащие кольцу, измеримы, но, кроме того, могут быть измеримыми и неограниченные операторы. В случае коммутативного кольца операторов умножения на функцию это понятие измеримости совпадает с обычным. Интеграл в кольце $\mathfrak{A}$ автор определяет сначала как линейный функционал $m'(A)$, определенный сначала на совокупности $\mathfrak{C}$ так называемых элементарных операторов $A \in \mathfrak{A}$; оператор $A \in \mathfrak{A}$ автор называет элементарным, если оператор проектирования на замыкание его области изменения конечен.

При этом $m'(A)$ обладает следующими свойствами: а) если P оператор проектирования и $P \in \mathfrak{C}$, то $m'(P) = m(P)$; б) если $T \in \mathfrak{C}$ и $T \geqslant 0$, то $m'(T) \geqslant 0$. Отсюда автоматически следует ряд других свойств $m'(A)$, из которых наиболее существенным является: в) если $S \in \mathfrak{A}$, $T \in \mathfrak{C}$, то $m'(ST) = m'(TS)$.

Далее в $\mathfrak{C}$ вводится L_1-норма $\| A \|_1$ как $\sup | m'(SA) |$ по всем S, $S \in \mathfrak{A}$, $\| S \| \leqslant 1$, при помощи которой понятие интеграла естественным образом распространяется на более широкий класс операторов, образующий полное пространство по отношению к L_1-норме; это пространство автор обозначает через L_1. Аналогично, исходя из L_2-нормы $\| A \|_2 = \sqrt{m'(A^* A)}$, автор строит полное пространство L_2 «квадратично интегрируемых» операторов.

В этой части результаты автора близки к результатам Диксмье (Dixmier J., РЖМат, 1953, 816). Автор излагает многочисленные результаты о свойствах измеримых операторов и интегралов операторов, обобщающие обычные свойства измеримых функций и их интегралов.

В заключение рассматриваются кольца специального типа, так называемые «H-алгебры» и «стандартные кольца».

H-алгеброй автор называет систему $(\mathfrak{H}, J, \mathfrak{D})$,

состоящую из гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, инволюции J в $\mathfrak{H}$ и J-инвариантного подмножества $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{H}$, которое является ассоциативной алгеброй относительно умножения и линейных операций в $\mathfrak{H}$, причем а) $(ab, c) = (b, a^*c) = (a, cb^*)$, где $a^* = Ja$; б) $x \to ax$ есть непрерывное отображение $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{D}$ при любом фиксированном $a \in \mathfrak{D}$; в) если L_a — непрерывное расширение этого отображения на все пространство $\mathfrak{H}$ и если $L_a x = 0$ для всех $a \in \mathfrak{D}$, то $x = 0$. Кольцо $\mathfrak{A}$ автор называет стандартным (относительно J), если $J\mathfrak{A}J = \mathfrak{A}'$ и $J'TJ = T^*$ для всех операторов T из центра кольца $\mathfrak{A}$. Среди многочисленных полученных результатов особый интерес представляют условия, при которых данное кольцо унитарно эквивалентно кольцу операторов левого умножения в H-алгебре.

Отметим еще следующие результаты: 1) всякий алгебраический изоморфизм двух стандартных колец порождается некоторым унитарным отображением гильбертовых пространств, в которых эти кольца заданы; 2) всякая H-алгебра разлагается в континуальную прямую сумму H-алгебр так, что все операторы центра исходной H-алгебры диагональны. *М. А. Наймарк*

1714. Полная производная и полный дифференциал оператора. Детуш-Эшлиман (Dérivée et différentielle totale d'un opérateur. Destouches-Aeschlimann Florence), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 4, 354—355 (франц.)

В кольце E операторов, содержащем единицу 1, аксиоматически выделяются конечное подмножество E_v, называемое множеством независимых переменных, и конечное подмножество E_d, называемое множеством дифференциалов независимых переменных, причем каждому $x_i \in E_v$ отвечает $dx_i \in E_d$ (dx_i вообще не перестановочен с элементами из E_v). Кроме того, в E выделяется конечное подмножество $E_{D,t}$ полных производных dx_i/dt, где t — числовой параметр. Далее аксиоматически определяются частные производные $\partial F/\partial x_i$, полные дифференциалы dF операторов $F \in E$ и полные производные dF/dt оператора $F \in E$ и выводятся правила действия с ними, обобщающие на некоммутативный случай известные правила анализа.

Если, в частности, x_i — операторы умножения на числовые независимые переменные, а F — оператор умножения на числовую функцию, то определенные аксиоматически производные и дифференциалы переходят в операторы умножения на обычные производные и дифференциалы.

При известных предположениях выводится соотношение вида

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{ih}(HF - FH),$$

из которого заключается, что всякий первый интеграл в волновой механике является также первым интегралом соответствующей задачи в классической механике; отмечается, что обратное утверждение вообще неверно. *М. А. Наймарк*

1715. Об индексе неограниченного оператора. Гохберг И. Ц., Мат. сб., 1953, **33** (75), № 1, 193—198

Пусть A — замкнутый линейный оператор с областью определения в банаховом пространстве E_1 и множеством значений $\mathfrak{R}(A)$ в пространстве E_2, который обладает следующими свойствами: а) множество решений уравнения $Ax = 0$ имеет конечную размерность $\alpha(A)$; б) размерность $\beta(A)$ фактор-пространства $E_2/\overline{\mathfrak{R}(A)}$ конечна; в) оператор A нормально разрешим ($\overline{\mathfrak{R}(A)} = \mathfrak{R}(A)$). Разность $\varkappa(A) = \alpha(A) - \beta(A)$ называют индексом оператора A.

Ф. В. Аткинсон (Мат. сб., 1952, **28** (**70**), № 1, 3—14) для ограниченного оператора A, М. Г. Крейн и М. А. Красносельский (Мат. сб., 1952, **30** (**72**), № 2, 219—224) для неограниченного A показали, что при различных предположениях о линейном операторе B (малость нормы, конечномерность, полная непрерывность) оператор $A + B$ обладает свойствами а), б), в), причем справедливо равенство $\varkappa(A + B) = \varkappa(A)$.

В случае неограниченного оператора A и вполне непрерывного B М. Г. Крейн и М. А. Красносельский требовали существования базиса в E_2, причем высказали предположение о несущественности этого требования.

Автор устанавливает справедливость последнего предположения. *М. А. Красносельский*

1716. Заметка о банаховых пространствах Калкина и Моррея. Рот е (A note on the Banach spaces of Calkin and Morrey. Rothe E. H.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 493—499 (англ.)

Рассматривается банахово пространство $\mathfrak{B}_\alpha$ ($\alpha > 1$), элементами которого служат действительные функции $f(t) = f(t_1, \ldots, t_n)$, определенные и суммируемые со степенью α в ограниченной области G n-мерного вещественного евклидова пространства и имеющие по t_i ($i = 1, \ldots, n$) суммируемые со степенью α в области G обобщенные частные производные первого порядка $f^{(i)}(t)$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f\| = \left(\int_G \left\{|f(t)|^\alpha + \sum_{i=1}^{n} |f^{(i)}(t)|^\alpha\right\} dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Пространство $\mathfrak{B}_\alpha$ оказывается равномерно выпуклым (т. е. каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, где $x, y \in \mathfrak{B}_\alpha$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, следует $\frac{1}{2}\|x + y\| \leqslant 1 - \delta$), а следовательно, и рефлексивным. Помимо сильной топологии, вводимой нормой пространства $\mathfrak{B}_\alpha$, автор рассматривает и слабую топологию. Пусть C есть выпуклое и замкнутое множество функций f из $\mathfrak{B}_\alpha$, удовлетворяющих условию $\|f\| \leqslant K$. Обозначим через C_K топологическое пространство, состоящее из точек $x \in C$, топология которого вводится следующим определением окрестности:

Окрестность точки $x_0 \in C_K$ определяется положительным числом ε, конечным числом линейных функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ и состоит из всех точек $x \in C_K$, для которых

$$|l_i(x) - l_i(x_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема. C_K компактно, причем всякий вещественный функционал $I(x)$, полунепрерывный снизу на C_K, достигает своего минимума на C.

В работе даны следующие достаточные условия полунепрерывности снизу: 1) $I(x)$ полунепрерывен снизу в точке $x_0 \in C_K$, если существует линейный функционал $l(x)$ такой, что для всех $x \in C_K$ выполняется неравенство

$$I(x) - I(x_0) \geqslant l(x - x_0);$$

2) $I(x)$ полунепрерывен снизу, если он имеет первый и второй дифференциалы Фреше $dI(x, h)$ и $d^2I(x, h, k)$, причем $d^2I(x, h, k) \geqslant 0$ для $x \in C$. Полученные результаты автор применяет к доказательству существования минимума кратных интегралов. *М. М. Вайнберг*

1717. Применение вариационных методов в задаче о точках бифуркации. Красносельский М. А., Мат. сб., 1953, **33** (**75**), № 1, 199—214

Для потенциальных операторов, т. е. для операторов, являющихся градиентами функционалов, автор доказывает следующие две теоремы:

Теорема 1. Пусть Γ ($\Gamma\theta = \theta$) — нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала $\Phi(\varphi)$ ($\Phi(\theta) = 0$). Пусть оператор Γ имеет в нуле θ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ производную Фреше B, являющуюся самосопряженным оператором. Тогда наибольшее положительное (а значит и наименьшее отрицательное) собственное число оператора B будет точкой бифуркации оператора Γ.

Теорема 2. Если помимо условий теоремы 1 выполнено еще следующее условие: Γ есть градиент функционала $\Phi(\varphi)$, дифференцируемого с ограниченным остатком в некоторой окрестности U точки θ, т. е. равномерно относительно $\varphi \in U$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) - (\Gamma\varphi, h)}{\|h\|} = 0,$$

то каждое собственное число оператора B является точкой бифуркации оператора Γ.

Определение точки бифуркации см. в РЖМат, 1953, 1258. В качестве примера приложения этих теорем рассмотрен нелинейный оператор типа Гаммерштейна с ограниченным положительно определенным ядром.

Отметим, что требование слабой непрерывности функционала $\Phi(\varphi)$, которое содержится в формулировке теорем 1 и 2, является лишним (см., например, Вайнберг М. М., Усп. мат. наук, 1952, 7, № 4 (50), 55—102). *М. М. Вайнберг*

1718. О точечном характере спектра некоторого класса матриц в аналитическом пространстве. Рожанская Н. Н., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 1, 7—10

Исследуется характер спектра линейного оператора, преобразующего в себя пространство A_1 функций, аналитических в круге $|z| < 1$, с предельным переходом в смысле равномерной сходимости последовательности функций внутри этого круга. Линейный оператор в таком пространстве может быть выражен при помощи бесконечной матрицы. Основная теорема, доказанная в работе, позволяет выделить один класс матриц, имеющих точечный спектр, и формулируется следующим образом:

Если матрица $M(a_{ik})$ удовлетворяет условиям:

$$|a_{ik}| \leqslant Nq^k, \quad k > i, \quad 0 < q < 1;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant L, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant L, \quad N, L = \text{const},$$

то спектр ее состоит не более чем из счетного множества значений, не имеющих предельной точки на конечном расстоянии, причем все точки спектра являются собственными значениями матрицы.

Эта теорема содержит в себе, как частный случай, две теоремы референта (РЖМат, 1953, 1257). Доказательство ведется способом, представляющим собой видоизменение метода Диксона—Рисса (ср. Riesz F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Gauthier—Villars, P., 1952, гл. IV).

Из указанной выше теоремы следует:

Если последовательность функций $\{f_n(z)\}$ образует полную систему или базис в A_1, то система функций $\{f_n(z) - \lambda M f_n(z)\}$ также образует соответственно полную систему или базис в A_1 для всех λ, кроме, быть может, счетного множества значений, не имеющих предельной точки на конечном расстоянии. *М. Г. Хапланов*

1719. О пополнении нормированных K-пространств. Цвид Ф. А., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, **89**, 37—44

Доказывается, что если X — линейное полуупорядоченное нормированное пространство (нормированное K-пространство), причем норма в X монотонна ($|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$) и абсолютно частично аддитивна $\left(\text{из } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \text{ где } x_n \text{попарно дизъюнктны, следует, что } \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\right)$, то X допускает расширение, оказывающееся также и пополнением X по норме и являющееся KB-пространством. Определения используемых понятий см. в книге Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах», Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Примечание референта. Так как пополнение всякого метрического пространства по метрике единственно, то остается непонятным утверждение автора о минимальности построенного им расширения. *Б. З. Вулих*

1720. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств. Вулих Б. З., Изв. АН СССР, сер. мат., 1953, **17**, № 4, 365—388

K-линеал (линейное полуупорядоченное множество, все конечные подмножества которого ограничены и обладают гранями; см. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М.—Л., 1950) называется архимедовым, если для всякого его элемента $x > 0$ множество $\{nx\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) не ограничено сверху. Устанав-

ливается, что всякий архимедов K-линеал X изоморфен K-линеалу $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, состоящему из некоторых непрерывных функций, заданных на бикомпакте Q и допускающих на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$.

Если K-линеал не содержит единицы, то его можно различными способами дополнить до K-линеала с единицей. Пусть X—архимедов K-линеал, полный относительно «равномерной» сходимости (кратко: а. п. K-линеал), $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ — изоморфный ему K-линеал непрерывных функций и $C(Q)$—K-линеал всех конечных непрерывных функций в Q. K-линеал с единицей $\mathfrak{C}^1_\infty(Q)$, образованный всеми непрерывными функциями вида $x(t)+y(t)$, где $x\in\mathfrak{C}_\infty(Q)$ и $y\in C(Q)$, назван автором каноническим расширением K-линеала X. Такое расширение оказывается, в известном смысле, минимальным.

Пусть X — а. п. K-линеал с единицей. Последовательность его элементов x_n автор называет определяющей, если: а) $x_n\geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$; б) $\inf\{x_m, n1\}=x_n$ при $m\geqslant n$. А. п. K-линеал X с единицей внутренне нормален, если для всякой ограниченной определяющей последовательности x_n существует ее верхняя грань $\sup x_n$.

Доказывается, что для того чтобы а. п. K-линеал X с единицей был внутренне нормальным, необходимо и достаточно, чтобы при реализации X в виде K-линеала $\mathfrak{C}_\infty(Q)$ последний удовлетворял следующему условию: если $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции на бикомпакте Q, причем $0\leqslant y(t)\leqslant x(t)$, и если $x(t)$ входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$, то $y(t)$ также входит в $\mathfrak{C}_\infty(Q)$.

Существенно принадлежащее автору понятие «отделяющего множества». Замкнутое множество F бикомпакта Q называется отделяющим, если либо 1) для всяких двух открытых множеств $G_1, G_2\subset Q$, удовлетворяющих условиям: а) $[G_1]\cap[G_2]\neq\Lambda$, б) $[G_1]\cap[G_2]\subset F$, пересечение самих G_1 и G_2 не пусто, либо 2) открытых множеств G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям а) и б) не существует.

Установлены, в частности, следующие свойства отделяющих множеств: 1) если G — открытое множество, плотное в Q, а $F=Q\setminus G$ — отделяющее множество, то всякая непрерывная функция, заданная на G, распространима (единственным способом) с сохранением непрерывности на все Q; если при этом G само является нормальным пространством, то требование, чтобы $F=Q\setminus G$ было отделяющим, не только достаточно, но и необходимо для возможности распространения любой непрерывной функции с G на все Q; 2) в экстремальном бикомпакте каждое замкнутое множество — отделяющее.

Вводится понятие максимального расширения K-линеала, обобщающее понятие максимального расширения K-пространства, предложенное референтом. Доказывается, что для каждого внутренне нормального а. п. K-линеала X с единицей существует его максимальное расширение, определяемое однозначно с точностью до изоморфизма. Это максимальное расширение изоморфно максимальному расширению подлинеала $X_0\subset X$, состоящего из всех ограниченных элементов.

В заключение определяются и исследуются непрерывные функции от элементов K-линеала.

А. Г. Пинскер

См. также: 1518, 1519, 1523, 1587, 1593, 1609, 1663, 1670, 1730, 1800, 1813

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1721. Логическая трудность определения вероятности. Жемона (Difficoltà logiche della probabilità. Geymonat Ludovico), Illustr. scient., 1953, 5, № 42, 28—30 (итал.)

Указывается, что при классическом определении вероятности как отношения числа благоприятствующих равновероятных случаев к числу всех возможных возникает затруднение при определении равновероятности. Не дается каких-либо новых предложений для определения вероятности. Автор приводит ряд высказываний Э. Бореля, Карнапа, Мизеса и др., не определяя своего отношения к их взглядам.

Б. В. Гнеденко

1722. Заметка о законе Пуассона. Редхеффер (A note on the Poisson law. Redheffer R. M.), Math. Mag., 1953, 26, № 4, 185—188 (англ.)

Рассматриваются случайные точки на прямой, распределенные так, что вероятность $p_n(x)$ попадания n точек на данный отрезок A длины x не зависит от положения отрезка A и от числа точек, попавших на какие-либо отрезки, не пересекающиеся с A; кроме того,

$$\sum_0^\infty p_n(x)=1$$

при любом x. Тогда, как показывает автор, производящая функция распределения $p_n(x)$ имеет вид

$$\sum p_n(x)\,z^n=e^{xa(z)},$$

где $a(z)=-s+az+bz^2+\ldots$ вблизи $z=0$; $a, b, \ldots\geqslant 0$, $s=a+b+\ldots$ Обратно, любой функции $a(z)$ такого вида соответствует распределение $p_n(x)$ с указанными свойствами. Далее, если распределить отдельные точки по закону Пуассона с параметром ax, затем, независимо от расположения отдельных точек, распределить пары совпадающих точек по закону Пуассона с параметром bx и т. д., то в результате получится распределение $p_n(x)$, отвечающее функции $a(z)=-s+az+bz^2+\ldots$ При нарушении условия $\sum_n p_n(x)=1$ получаются аналогичные результаты.

Доказательство элементарное. Как указывает автор, из теории безгранично делимых законов факт расщепления распределения $p_n(x)$ на распределения Пуассона вытекает тривиальным образом.

А. А. Юшкевич

1723. Свойство случайности одной арифметической функции. Метрополис, Улам (A property of randomness of an arithmetical

function. Metropolis N., Ulam S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 252—253 (англ.)

Пусть $f(x)$ — случайное отображение множества E из n элементов в себя, сопоставляющее каждому $x \in E$ с одинаковыми вероятностями любой $y \in E$. Число прообразов μ для фиксированного элемента $y \in E$ является случайной величиной с биномиальным распределением, соответствующим n испытаниям Бернулли с вероятностью успеха $1/n$. Поэтому при больших n и сравнительно небольших m $P(\mu = m) \sim e^{-1}/m!$ и число λ_m элементов из E, имеющих ровно m прообразов, должно быть приблизительно равно $ne^{-1}/m!$

Авторы сопоставляют это свойство функции $f(x)$ с наблюдениями, проведенными ими при помощи электронной счетной машины над некоторой неслучайной арифметической функцией $g(x)$, и обнаруживают, что для последней наблюденные значения λ_m весьма близки к $ne^{-1}/m!$ [Функция $g(x)$ определяется следующим образом: целое число x $(0 < x < n = 2^k)$ записывается в двоичной системе $x = \alpha_0 \cdot 2^0 + \alpha_1 \cdot 2^1 + \ldots + \alpha_{k-1} 2^{k-1}$ и через $g(x)$ обозначается число, образованное средними k двоичными знаками числа x^2. В работе приводятся значения λ_m для $k = 6$, $m \leqslant 5$, и $k = 12$, $m \leqslant 6$.]

Е. Б. Дынкин

1724. Применение композиционного умножения к характеристическим функциям. Доказательство одной теоремы Хинчина. Жиро (Application du produit de composition aux fonctions caractéristiques. Démonstration d'un théorème de M. Khintchine. Girault Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 1, 20 — 22 (франц.)

Автор называет псевдохарактеристической функцией, соответствующей функции $f(x)$, функцию

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx;$$

при этом $f(x)$ предполагается неотрицательной и интегрируемой в $(-\infty, +\infty)$, но не должна быть нормирована.

Теорема. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — плотности некоторых законов распределения, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — соответствующие характеристические функции; тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t+\theta)\, \overline{\varphi_2(\theta)}\, d\theta$$

есть псевдохарактеристическая функция, соответствующая «плотности» $f_1(x)\, f_2(x)$.

Следствие. Для того чтобы функция $\varphi(t)$ была характеристической функцией абсолютно непрерывного закона, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+\theta)\, \overline{g(\theta)}\, d\theta,$$

где $g(t)$ — комплексная функция вещественной переменной t, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt = 1.$$

Отсюда простым предельным переходом может быть получен общий признак Хинчина (Бюлл. МГУ, 1937, **А 1**, № 5, 1—3) для характеристических функций любого закона распределения. Доказательства всех утверждений приводятся полностью. *А. Я. Хинчин*

1725. Центральная предельная теорема для плотностей. Смит (A frequency-function form of the central limit theorem. Smith Walter L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 462—472 (англ.)

Рассматриваются условия, при которых имеет место усиленная сходимость плотности $h_n(x)$ распределения вероятностей нормированных сумм независимых случайных величин к плотности нормального распределения

$$\lim_{n\to\infty} |x|^m h_n(x) = \frac{|x|^m}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (1)$$

для $0 \leqslant m \leqslant 2$ равномерно относительно x $(-\infty < x < +\infty)$.

В случае одинаково распределенных слагаемых для (1) достаточно выполнения двух требований, налагаемых на слагаемые: 1) характеристическая функция $\Phi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{A}{|t|^\alpha} \qquad (2)$$

для всех вещественных t, $|t| \geqslant R$, при некоторых положительных A, R, α; 2) существует момент второго порядка. В случае разно распределенных слагаемых соотношение (1) доказывается при выполнении «условий Линдеберга» и двух дополнительных требований:

1) последовательность характеристических функций слагаемых $\Phi_n(t)$ содержит не слишком редкую подпоследовательность $\Phi_{n_k}(t)$, подчиненную требованию (2) при одних и тех же A, R, α;

2) дисперсия суммы с ростом числа слагаемых растет не слишком медленно. Случай одинаково распределенных слагаемых и $m = 0$ изучался раньше в монографии Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова, «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» (Гостехиздат, М.—Л., 1949; см. также венгерский перевод этой книги, где формулировки соответствующих теорем улучшены). Автор рассматривает возможность распространения центральной предельной теоремы для плотностей на случай, когда функция распределения $H_n(x)$ нормированной суммы не является абсолютно непрерывной. Доказывается теорема:

Если слагаемые распределены по одному и тому же закону $F(x)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = 1,$$

и если на каком-нибудь интервале $F'(x)$ почти всюду равна некоторой положительной функции

ограниченной вариации, то: 1) имеет место (1), где $h_n(x)$ — производная от абсолютно непрерывной компоненты распределения $H_n(x)$; 2) в разложении $H_n(x) = p_n P_n(x) + q_n Q_n(x)$ $(p_n + q_n = 1)$ на абсолютно непрерывную $P_n(x)$ и сингулярную $Q_n(x)$ компоненты, множители q_n составляют сходящийся ряд;

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x^m h_n(x) - \frac{x^m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx = 0 \quad \text{для}$$

$m = 0$, $m = 2$.

Последняя постановка задачи рассматривалась ранее Ю. В. Прохоровым (Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 6, 797—800), который получил законченные результаты для случая $m = 0$. *А. А. Бобров*

1726. Сходимость эмпирического распределения вероятностей к теоретическому. Форте, Мурье (Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. Fortet Robert, Mourier Édith), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 18, 1739—1740 (франц.)

Пусть Ω — сепарабельное метрическое пространство, B — борелевское тело множеств пространства Ω, содержащее все сферы, $P(E)$ — распределение вероятностей, заданное на системе B. Рассматривается последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

независимых случайных точек из Ω и измеримые функции $f(x)$, определенные на Ω. Формулируются две теоремы:

1. Пусть

$$M(f) = \sup_{x',\, x''} \frac{|f(x') - f(x'')|}{\rho(x', x'')}$$

и пусть для некоторого $x_0 \in \Omega$

$$\int_{\Omega} \rho(x_0, x)\, P(dx) < \infty$$

($\rho(x, y)$ обозначает расстояние между x и y). Тогда для любого $k > 0$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

сходится к

$$\int_{\Omega} f(x)\, P(dx)$$

равномерно на множестве функций f, заданном условием $M(f) < k$.

2. Пусть $N(f) = \sup_x |f(x)|$. Для любого $k > 0$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

сходится к

$$\int_{\Omega} f(x)\, P(dx)$$

равномерно на множестве функций f, заданном условием $M(f) + N(f) < k$.

Эти теоремы можно рассматривать как обобщение известной теоремы В. И. Гливенко о равномерной сходимости эмпирической функции распределения к теоретической. Указываются следующие приложения:

1) Если Ω — числовая прямая, $F(x)$ — функция распределения такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dF(x) < \infty$$

и $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|\, dx = 0.$$

2) Пусть Ω — плоскость, $P(E)$ — распределение, абсолютно непрерывное относительно меры Лебега. Пусть $\mu_n(E)$ обозначает число точек множества E, содержащихся среди первых n членов последовательности (1). Тогда с вероятностью 1 $\mu_n(\Omega')/n$ сходится к $P(\Omega')$ равномерно на множестве всех открытых полуплоскостей Ω'. *Е. Б. Дынкин*

1727. Моменты времени возвращения при случайном блуждании. Ходжес, Розенблат (Recurrence-time moments in random walks. Hodges J. L., Jr, Rosenblatt M.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 127—136 (англ.)

Рассматриваются однородные цепи Маркова со счетным числом состояний $\{E_i\}$ и переходными вероятностями $\{p_{ij}\}$. Цепь Маркова называется неразложимой и возвратной, если для любой пары состояний E_i и E_j случайная величина R_{ij} — время, прошедшее до первого попадания в E_j при начальном состоянии E_i — с вероятностью единица конечна. Индексом I_{ij} случайной величины R_{ij} называется наибольшее целое число k, при котором k-ый момент $M(R_{ij})^k < \infty$. Исходным пунктом является следующее утверждение:

Если W — неразложимая возвратная цепь Маркова, то для любой пары состояний E_i и E_j индекс $I_{ii} = \min(I_{ij}, I_{ji})$ и $I_{ii} = I_W$ не зависят от i.

Случайным блужданием называется цепь Маркова с состояниями $\{E_i\}$, $i = -\infty, \ldots, \infty$, у которой

$$p_{i,\,i+1} = p_i, \quad p_{i,\,i-1} = 1 - p_i = q_i. \qquad (1)$$

Показывается, что в этом случае индекс I_{ij} принимает не более двух различных значений: $I_{ij} = \bar{I}$ при $i < j$ и $I_{ij} = \bar{\bar{I}}$ при $i > j$ и что можно ограничиться далее лишь рассмотрением индексов случайных блужданий с отражающим экраном, т. е. цепей Маркова с состояниями $\{E_i\}$, $i = 0, \ldots, \infty$, у которых при $i > 0$ выполнено (1), а $p_{00} = 1$. Показывается, что если у такого блуждания при

всех i $p_i > \varepsilon > 0$, то необходимое и достаточное условие возвратности состоит в том, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k} = \infty . \qquad (2)$$

В частном случае $p_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\beta k}\right)$ это условие сводится к условию $\beta \geqslant 2$.

Выводится следующая теорема сравнения:

Если имеются два случайных блуждания W и $\overline{W}$ с переходными вероятностями $\{p_i\}$ и $\{\overline{p}_i\}$ и $p_i \geqslant \overline{p}_i$, то $I_W \leqslant I_{\overline{W}}$. Находится, наконец, что при $p_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{k+\alpha}\right)$ индекс $I_W = r$, где $r - \frac{1}{2} < \alpha < r + \frac{1}{2}$.

Р. Л. Добрушин

1728. Свойства непрерывности траекторий марковского процесса. Кинни (Continuity properties of sample functions of Markov processes. Kinney J. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **74**, № 2, 280—302 (англ.)

Пусть Ω — пространство, на котором задано распределение вероятностей $P(\Lambda)$, T^0 — числовой интервал. Рассматривается марковский процесс $x_t(\omega)$ ($t \in T^0$, $\omega \in \Omega$) на числовой прямой L, удовлетворяющий условию S^*: существуют счетное всюду плотное в T^0 множество R и множество $\Lambda \subset \Omega$, такие, что: а) $P(\Lambda) = 0$, б) если $\omega \notin \Lambda$, то, каковы бы ни были открытый интервал $I \subset T^0$ и замкнутое множество $B \subset L$, из того, что $x_t(\omega) \in B$ для всех $t \in I \cap R$, следует, что, $x_t(\omega) \in B$ для всех $t \in I$ (это условие является усилением условия сепарабельности процесса; как показал Дуб, для любого процесса существует стохастически эквивалентный процесс, подчиненный условию S^*).

Изучается связь между свойствами непрерывности траекторий процесса $x_t(\omega)$ и поведением вероятности перехода $P(t, x, T, I)$ при $T - t \to 0$. На поведение $P(t, x, T, I)$ налагаются условия следующих двух типов;

$$(\mathrm{C}) P(t, x, t+h, V(x, a)) = 1 + f(h)$$
$$(f(h) \to 0 \text{ при } h \to 0)$$

($V(x, a)$ обозначает интервал $(x - a, x + a)$):

$$(\mathrm{D}) P(t, x, T, I) \to \delta(x, I) \text{ при } T - t \to 0$$

(I — интервал, x не является концом I; $\delta(x, I) = 1$, если $x \in I$ и $\delta(x, I) = 0$, если $x \notin I$).

Содержание работы можно разделить на 4 части.

В первой части изучаются свойства непрерывности $x_t(\omega)$, имеющие место при фиксированном t для почти всех ω. Например, доказывается, что $P(x_{t_0 - 0} = x_{t_0}) = 1$, если условие (D) выполнено при $t = t_0$ для любого конечного интервала I равномерно относительно $x \in A$ (A — произвольное замкнутое множество, не содержащее концов интервала I).

Во второй части выводятся критерии ограниченности $x_t(\omega)$. Помимо условий типа (C) и (D) здесь используются еще условия $R(\infty)$ и $R(-\infty)$: если I — ограниченный интервал и $T - t$ достаточно мало, то $P(t, x, T, I) \to 0$ при $x \to +\infty$ (соответственно, при $x \to -\infty$). Например, показывается, что если выполнены условия $R(\infty)$ и (D), причем последнее выполняется для любого конечного интервала I равномерно по $t \in T^0$ и $x \in A$ (A — любое замкнутое множество, не содержащее концов I), то с вероятностью 1 $x_t(\omega)$ ограничено сверху.

В третьей части изучаются условия, при которых для почти всех ω $x_t(\omega)$ не имеет разрывов, более сложных, чем скачки. Доказывается, что для этого достаточно, чтобы условие (C) выполнялось равномерно по $t \in T^0$, $x \in L$. Этот результат является усилением теоремы референта (Изв. АН СССР, сер. мат., 1952, **16**, 563—572), в которой те же выводы делаются в предположении, что $f(h) = o(\sqrt{h})$.

В четвертой части выводятся условия, при которых $x_t(\omega)$ для почти всех ω непрерывна. Основной результат этой части содержится в упомянутой работе референта. Даются примеры, подтверждающие, что если условия автора не выполнены, то свойства непрерывности могут нарушаться.

В работе, особенно в первой и во второй частях, широко используются результаты Дуба о непрерывности мартингал-процессов (martingale process) (как было замечено Дубом, формула $y_t(\omega) = P(t, x_t(\omega), T, A)$ сопоставляет марковский процесс $x_t(\omega)$ с мартингал-процессом $y_t(\omega)$).

Е. Б. Дынкин

1729. Эргодическое свойство процесса, описывающего броуновское движение. Каллианпур, Роббинс (Ergodic property of the Brownian motion process. Kallianpur G., Robbins H.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, №6, 525 — 533 (англ.)

Пусть $X(t)$ есть случайный процесс Винера, описывающий одномерное броуновское движение: $X(0) = 0$, и для любых $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $X(t_j) - X(t_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы и подчиняются нормальному распределению вероятностей со средним значением нуль и дисперсиями $t_j - t_{j-1}$. Пусть $V(t) = (X(t), Y(t))$ обозначает случайный процесс, описывающий двумерное броуновское движение, т. е. процесс, у которого обе компоненты — независимые между собой процессы Винера. Пусть, далее, $f(x, y)$, $g(x, y)$ — две вещественные ограниченные и суммируемые на всей плоскости функции и

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \bar{g} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, dx\, dy.$$

Доказываются следующие две теоремы относительно процесса $V(t)$:

Теорема 1. Если $\bar{f} \neq 0$, то для любого u

$$\lim_{T \to \infty} Pr\left\{\frac{2\pi}{\bar{f} \log T}\int_0^T f(V(t))\, dt < u\right\} = G(u),$$

где

$$G(u)=\begin{cases}1-e^{-u} & \text{при } u\geqslant 0\\ 0 & \text{при } u<0.\end{cases}$$

Теорема 2. Если $\bar{g}\neq 0$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T f(V(t))\,dt}{\int_0^T g(V(t))\,dt}=\frac{\bar{f}}{\bar{g}},$$

где предел понимается как предел по вероятности.

В одномерном случае вместо $f(x, y)$, $g(x, y)$ рассматриваются вещественные ограниченные и суммируемые на всей прямой функции $f(x)$, $g(x)$ одной переменной,

$$\bar{f}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,\ \bar{g}=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, формулируются следующим образом:

Теорема 3. Если $\bar{f}\neq 0$, то для любого u

$$\lim_{T\to\infty} Pr\left\{\frac{1}{\bar{f}\sqrt{T}}\int_0^T f(X(t))\,dt\leqslant u\right\}=H(u),$$

где

$$H(u)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u e^{-y^2/2}\,dy & \text{при } u\geqslant 0\\ 0 & \text{при } u<0.\end{cases}$$

Теорема 4. Если $\bar{g}\neq 0$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T f(X(t))\,dt}{\int_0^T g(X(t))\,dt}=\frac{\bar{f}}{\bar{g}},$$

где предел понимается как предел по вероятности.

Доказательства приведенных теорем опираются на некоторые предложения относительно последовательности частных сумм ряда независимых и одинаково распределенных случайных величин или двумерных случайных векторов (Kallianpur G., Robbins H., Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 3, 247). *А. М. Яглом*

1730. Функционалы конечной степени и сходимость их фурье-эрмитовских разложений. Грейвс (Functionals of finite degree and the convergence of their fourier-hermite developments. Graves Ross E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 1, 95—101 (англ.)

Пусть C — винеровское пространство, т. е. пространство непрерывных на $[0,1]$ функций $x=x(t)$ с $x(0)=0$, в котором введена мера так, что приращения $\Delta x(t)$ на неперекрывающихся интервалах t, рассматриваемые как случайные величины, независимы и распределены нормально со средним значением 0 и дисперсией Δt. Камерон и Мартин (Cameron R. H., Martin W. T., Ann. Math., 1947, **48**, 385—392) ввели полиномы Фурье-Эрмита, определенные на C, и доказали их полноту в $L_2(C)$. В реферируемой работе вводится понятие функционала $F(x)\in L_2(C)$ конечной степени и доказывается, что его фурье-эрмитовское разложение сходится на C почти всюду. Доказательство основано на обобщении неравенства Чебышева, принадлежащем Колмогорову. *И. И. Гихман*

1731. Основные теоремы теории информации. Мак-Миллан (The basic theorems of information theory. McMillan Brockway), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 196—219 (англ.)

Цель статьи — формальное расширение и усовершенствование основных концепций и результатов теории информации, базировавшихся до сих пор почти исключительно на известных исследованиях Шеннона (Статистическая теория передачи электрических сигналов, сборник переводов, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 7—87). Автор ограничивается рассмотрением дискретных источников.

Источником (source) называется случайный процесс

$$x=(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots),$$

где значениями x_t могут быть элементы («буквы») некоторого конечного множества («алфавита») A; совокупность A^{I} всех x рассматривается как пространство элементарных событий. Основным множеством элементарных событий называется любая совокупность таких x, в которых элементы $x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n-1}$ принимают какие-либо фиксированные значения; при этом t — любое целое, n — любое натуральное число. Задается какое-либо поле вероятностей μ на борелевском поле F_A множеств, построенном на базе описанных основных множеств. Этим завершается статистическое определение источника, который, очевидно, полностью определяется алфавитом A и полем вероятностей μ, и обозначается поэтому через $[A, \mu]$. Пусть Tx — преобразование, переводящее x в $y=(\ldots y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots)$, где $y_t=x_{t+1}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Из $S\in F_A$ следует $TS\in F_A$. Источник называется стационарным, если для любого $S\in F_A$ имеем $\mu(TS)=\mu(S)$, и эргодическим, если сверх того из $TS=S$ вытекает, что $\mu(S)=0$ или $\mu(S)=1$. Описанное определение источника значительно шире, чем определение Шеннона, рассматривавшего лишь случайные процессы типа цепей Маркова.

Переводчиком (кодификатором — transducer) называется функция $y=\tau(x)$, где $x\in A^{\mathrm{I}}$, $y\in B^{\mathrm{I}}$, A и B — два произвольных алфавита; при этом требуется, чтобы для любого целого t последовательность элементов $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$ однозначно определялась последовательностью элементов $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$ (переводчик не может «предвосхищать»).

Канал (channel) характеризуется двумя алфавитами A и B и распределением вероятностей ν_θ на множестве F_B, зависящим от параметра $\theta\in A^{\mathrm{I}}$; к этому присоединяется аналогичное предыдущему требование невозможности предвосхищения.

Переводчик есть частный случай канала (когда полученный сигнал однозначно определяется переданным сигналом θ). Канал может быть обозначен через $[A, \nu_\theta, B]$. Канал называется стационарным, если при любом θ и при $S \in F_B$ мы имеем $\nu_\theta(S) = \nu_{T\theta}(TS)$.

Энтропия (entropy) конечного поля вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ определяется, как у Шеннона, формулой

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Пусть имеем два алфавита A и B с соответственными буквами α и β и с вероятностью $p(\alpha, \beta)$ пары (α, β), и пусть $H(\alpha)$, $H(\beta)$, $H(\alpha, \beta)$ соответственно означают энтропии полей $p(\alpha)$, $p(\beta)$, $p(\alpha, \beta)$. Тогда

$$H_\beta(\alpha) = H(\alpha, \beta) - H(\beta)$$

— средняя условная энтропия поля $p(\alpha)$ при данном β. Согласно Шеннону, всегда $H_\beta(\alpha) \leqslant H(\alpha)$: предварительные сведения каковы бы они ни были не могут увеличить энтропии данного поля.

Каковы бы ни были t, n и буквы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ алфавита A, вероятности событий

$$x_{t-k} = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

образуют (при изменяющихся α_i) поле, содержащее a^n вероятностей (a — число букв алфавита A); пусть F_n — энтропия этого поля (она не зависит от t в стационарном случае); при $n \to \infty$ отношение F_n/n всегда стремится к пределу, который называется энтропией источника $[A, \mu]$ (entropy rate of a source).

Пусть стационарный канал $[A, \nu_\theta, B]$ пропускает продукцию стационарного источника $[A, \mu]$ и пусть $C = A \otimes B$ — алфавит, буквами которого служат пары (α, β) $(\alpha \in A, \beta \in B)$.

Тогда C^{I} есть множество последовательностей

$$(\ldots, (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots),$$

причем распределение вероятностей ω в борелевском поле F_C однозначно определяется требованием, чтобы

$$\int_{C^{\mathrm{I}}} h(x, y)\, d\omega(x, y) = \int_{A^{\mathrm{I}}} d\mu(x) \int_{B^{\mathrm{I}}} h(x, y)\, d\nu_x(y)$$

для любой положительной измеримой функции $h(x, y)$. Мы получаем новый источник $[C, \omega]$, который будет стационарным, если стационарны первичный источник $[A, \mu]$ и канал $[A, \nu_\theta, B]$. Этот источник описывает совместное распределение на входе и на выходе канала, в то время как первичный источник $[A, \mu]$ описывает распределение только на входе. Распределение же на выходе описывается источником $[B, \eta]$, где η означает распределение в поле F_B, однозначно определяемое требованием

$$\int_{B^{\mathrm{I}}} k(y)\, d\eta(y) = \int_{A^{\mathrm{I}}} d\mu(x) \int_{B^{\mathrm{I}}} k(y)\, d\nu_x(y).$$

Источник $B(\eta_i)$ также стационарен.

Пусть $H(x, y)$, $H(x)$ и $H(y)$ соответственно означают энтропии источников $[C, \omega]$, $[A, \mu]$ и $[B, \eta]$. Величина $R = H(x) + H(y) - H(x, y)$ называется скоростью передачи (transmission rate) источника $[A, \mu]$ по каналу $[A, \nu_\theta, B]$. Верхняя грань этой величины по всевозможным μ называется пропускной способностью (емкостью — capacity) канала $[A, \nu_\theta, B]$.

Основная теорема (теорема 11 цитированной работы Шеннона) гласит (в несколько усиленном виде): пусть даны источник с энтропией H и канал с пропускной способностью C; если $H < C$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n(\varepsilon)$ и такой (зависящий от ε) переводчик, что, зная $n(\varepsilon)$ последовательных букв на выходе канала, мы можем правильно определить соответствующие n букв на входе с вероятностью большей, чем $1 - \varepsilon$; если $H > C$, то при достаточно малом ε такого переводчика не существует.

Доказательство Шеннона детально анализируется в свете введенных новых концепций; в нем обнаруживаются пробелы и намечаются пути к их ликвидации. Попутно даются доказательства теорем, усиливающих теоремы 3 и 4 работы Шеннона соответственно расширенным концепциям автора. Последний параграф содержит одну новую теорему, которая, по мнению автора, может иметь существенные приложения. *А. Я. Хинчин*

1732 РЕЦ. Вероятность и наука. Адлер (Wahrscheinlichkeit und Wissenschaft. Adler A., S. 29, 2 Abb, Verlag Paul Haupt, Bern, 1953, 2. 10 Schw. Fr.) [**Рецензия: Виллерс** (Willers), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 7, 251 (нем.)]

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1733. О среднем последовательных разностей и его отношении к корню из среднего квадратического. Камат (On the mean successive difference and its ratio to the root mean square. Kamat A. R.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 116—127 (англ.)

Пусть x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть n нормально распределенных случайных величин со средними μ_i и общей для всех дисперсией σ^2. Рассматривается среднее последовательных разностей

$$d = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|x_i - x_{i+1}|}{n-1}.$$

В случае $\mu_i = \mu$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вычисляются четыре первых момента d и с их помощью указывается тип кривой Пирсона, аппроксимирующей распределение d.

В случае, когда μ_i различны, но таковы, что вторыми и более высокими степенями величин

$$\frac{\Delta\mu_i}{\sigma} = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\sigma}$$

можно пренебречь, показывается, что оценки d и

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{n-1}}$$

для σ значительно лучше, чем оценка

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Указывается также тип кривой Пирсона, аппроксимирующей распределение отношения

$$W = \frac{d}{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{|x_i - x_{i+1}|}{n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}}.$$

Кроме того, сравниваются отношения $W = d/s$ и d/σ. Получается, что при $n \to \infty$

$$E\left(\frac{d}{s}\right) - E\left(\frac{d}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

и

$$\frac{D\left(\frac{d}{s}\right)}{D\left(\frac{d}{\sigma}\right)} - 0{,}395 < 1.$$

С. Х. Туманян

1734. Неполные и абсолютные моменты многомерного нормального распределения и некоторые их применения. К а м а т (Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications. K a m a t A. R.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 20—34 (англ.)

Рассматриваются абсолютные и неполные моменты многомерного нормального распределения:

$$(l, m, n, \ldots) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^l |x_2|^m |x_3|^n \ldots p(x)dx$$

и

$$[l, m, n, \ldots] = \int_{0}^{\infty} \ldots \int_{0}^{\infty} x_1^l x_2^m x_3^n \ldots p(x)\,dx.$$

Здесь $p(x)$ — нормальная плотность случайных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, имеющих среднее значение, равное нулю, и заданную, одинаковую для всех, дисперсию, т. е.

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \omega^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\omega}\sum \omega_{rs} x_r x_s\right\}$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

где ω — детерминант матрицы вторых моментов, ω_{rs} — алгебраические дополнения элементов этой матрицы и $\sum \omega_{rs} x_r x_s$ — положительно определенная квадратичная форма. Указанные моменты вычисляются для двумерного и трехмерного случаев.

Приводятся таблицы для (m, n) и $[m, n]$ при m и n, удовлетворяющих условию $m + n \leqslant 6$, а также таблица для значительного числа моментов (l, m, n) при l, m и n, удовлетворяющих условию $l + m + n \leqslant 6$.

Найдены выражения $(l, m, n, \ldots)$ и $[l, m, n, \ldots]$ в виде степенных рядов по коэффициентам корреляции. Далее, при помощи полученных результатов рассматриваются распределения некоторых статистик, например, статистики

$$T = |x_1| + c_2 |x_2| + c_3 |x_3|,$$

где x_1, x_2, x_3 имеют трехмерное нормальное распределение со средними, равными нулю, и заданными дисперсиями, а $-1 \leqslant c_2, c_3 \leqslant 1$. Показывается, что распределение T хорошо аппроксимируется кривыми Пирсона, причем тип кривой зависит от знаков c_2, c_3. *С. Х. Туманян*

1735. Нормальное распределение на окружности. Теория и таблицы. Г у м б е л ь, Г р и н в у д, Д ь ю р а н д (The circular normal distribution: Theory and tables. G u m b e l E. J., G r e e n w o o d J. A r t h u r, D u r a n d D a v i d), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 261, 131—152 (англ.)

После нескольких тривиальных замечаний по поводу задания вероятностной меры на окружности единичного радиуса, авторы рассматривают вероятностную плотность вида $f(\alpha) = Ce^{k\cos(\alpha - \alpha_0)}$; $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Она была введена впервые Мизесом (Mises Richard, Phys. Z., 1918, **19**, 490—500) из соображений аналогии с нормальным законом на прямой, с точки зрения способа максимального правдоподобия: искалась вероятностная плотность на окружности $f(\alpha - \alpha_0)$ с параметром α_0 так, чтобы оценка α_0 по способу максимального правдоподобия совпадала с углом α^* «среднего вектора», подчиняющимся уравнению: $\Sigma \sin(\alpha_\nu - \alpha^*) = 0$, ($\alpha_\nu$ — выборочные углы).

Других теоретических и практических оснований для рассмотрения $f(\alpha)$ не приводится. Прилагаются подробные таблицы с двумя входами $\sqrt{f(\alpha)}$ (более удобные для графического изображения, чем таблицы $f(\alpha)$) и поясняются способы их вычисления

Опечатки: на стр. 134 вместо $f(\alpha) = \frac{1}{2}\pi$ должно быть $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$; на стр. 135 вместо $f(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$ должно быть $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(1 + \cos\alpha)$.

Ю. В. Линник

1736. Приближенные доверительные интервалы. Б а р т л е т т (Approximate confidence intervals. B a r t l e t t M. S.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 12—19 (англ.)

Рассматриваются повторные выборки из одномерной генеральной совокупности, характеризующейся плотностью вероятности распределения, зависящей от одного параметра θ, или из дискретной совокупности с вероятностями отдельных значений, зависящими от θ. Допускается существование и дифференцируемость достаточное число раз функции правдоподобия L (логарифма

плотности вероятности выборки для непрерывного случая и логарифма самой вероятности для дискретного случая).

Изучаются приближенные доверительные интервалы, построенные непосредственно при помощи $\frac{\partial L}{\partial \theta}$, так как такое построение проще, чем употребление статистики максимального правдоподобия $\hat{\theta}$, и асимптотически ему эквивалентно (Kendall M. G., The advanced theory of statistics, 1946, 2, 72—73): $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ асимптотически нормально со средним 0 и удобно вычисляемой дисперсией

$$I = E\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right).$$

Ранее составлялись приближенные доверительные интервалы исходя из функции $\psi = \frac{\partial L}{\partial \theta} I^{-1/2}$, если она оказывалась монотонной функцией θ для всех выборок. Автор предлагает также поправки на отклонение закона распределения величины $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ от нормального. Вводятся асимметрия

$$k_3 = 3\frac{\partial I}{\partial \theta} + 2E\left(\frac{\partial^3 L}{\partial \theta^3}\right),$$

эксцесс

$$k_4 = E\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^4 - 3I^2.$$

Предлагается применять функцию

$$T(\theta) = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{1}{6}\frac{k_3}{I^2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 - I\right],$$

распределение которой более близко к нормальному, чем распределение $\frac{\partial L}{\partial \theta}$. Предполагая приближенную нормальность $T(\theta)$, автор получает приближенные доверительные интервалы из формулы $T(\theta) = \pm \mu\sqrt{I}$, где μ определяется заданной надежностью. При $k_3 = 0$ вводится более сложная поправка, содержащая k_4. Указывается, что, вообще говоря, лишь для малых выборок поправки нарушают монотонность исходных функций по θ, если она существовала. Приводится 3 примера с таблицами. *Ю. В. Линник*

1737. О размахе частных сумм конечного числа независимых нормальных переменных. Э й н и с, Л л о й д (On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates. A n i s A. A., L l o y d E. H.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 35—42 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же плотность вероятности $\varphi(x)$ и

$$S_r = X_1 + X_2 + \ldots + X_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Положим

$$U_n = \max_r (S_r) \text{ и } L_n = \min_r (S_r).$$

Асимптотическое распределение размаха частных сумм независимых случайных величин $U_n - L_n$ при $n \to \infty$ изучено Феллером (Feller W., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 427—432).

Авторы рассматривают распределение величины $U_n - L_n$ при конечных n и в предположении, что величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нормально распределены и нормированы, находят математическое ожидание этой величины

$$M(U_n - L_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{r=1}^{n-1} r^{-1/2}$$

Для доказательства используется полученное в работе равенство

$$\int_0^\infty \ldots (r) \ldots \int_0^\infty \exp\left\{\sum_{i=1}^{r-1} y_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{r} y_i^2\right\} dy_1 \ldots dy_r = (2\pi)^{r/2} (r+1)^{-1/2}.$$

Е. Л. Рвачева

1738. Об оценке дисперсии при помощи группировки. Г о ф м а н (Zur Berechnung der Streuung einer Häufigkeitsverteilung mit Klassenteilung. H o f m a n n L u d w i g), Allgem. Forstzeitung, 1953, **64**, № 11/12, 141—142 (нем.)

Критикуется распространенный в математической статистике метод оценки моментов теоретического распределения по моментам группированного выборочного распределения. Автор показывает, что оценка дисперсии равномерного распределения при помощи группировки и поправки Шеппарда дает заниженный результат. Если же поправку Шеппарда брать с обратным знаком, то оценка дисперсии в этом случае получается асимптотически несмещенной. Следует отметить, что вопрос о законности применения поправок Шеппарда разбирается в ряде учебников по математической статистике (см., например, Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948, 396—397). Оказывается, что именно в тех случаях, которые рассматривает автор, применение поправок Шеппарда не рекомендуется. *Л. Н. Большев*

1739. Применение t-критерия в случае двух выборок из ненормальной совокупности. Г р о н о у (Non-normality in two-sample t-tests. G r o n o w D. G. C.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 222—225 (англ.)

Исследуется возможность применения t-распределения в качестве приближенного распределения статистик

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{\left(\frac{n+n'}{nn'}\left[\frac{(n-1)s^2 - (n'-1)s'^2}{n+n'-2}\right]\right)^{1/2}}$$

и

$$v = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{\left(\frac{s^2}{n} + \frac{s'^2}{n'}\right)^{1/2}},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{x}' = \frac{1}{n'}\sum_{j=1}^{n'} x'_j,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

$$s'^2 = \frac{1}{n'-1}\sum_{j=1}^{n'}(x'_j - \bar{x}')^2$$

в случае, когда выборки $x_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ и $x'_j\,(j=1, 2, \ldots, n')$ взяты не из нормальных совокупностей. Приведенные таблицы изменения 5%-го уровня значимости в зависимости от отношения дисперсий выборок и коэффициента эксцесса β для $\beta = 2{,}5;\ 4;\ 5$ при равных выборочных средних показывают незначительное отклонение уровня значимости от нормального случая $\beta = 3$. Влияние ненормальности выборок ($\beta = 2{,}5;\ 4;\ 5$) на мощность критерия в случае равной численности выборок даже при различных выборочных средних также незначительно. *Е. Л. Рвачева*

1740. Влияние неравенства групповых дисперсий на *F*-критерий однородности групповых средних. Хорснелл (The effect of unequal group variances on the *F*-test for the homogeneity of group means. Horsnell G.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 128—136 (англ.)

В работе проводится численный анализ влияния неравенства групповых дисперсий и частот на *F*-критерий однородности групповых средних; для некоторых частных случаев приведены таблицы изменения уровня значимости и мощности критерия. *Е. Л. Рвачева*

1741. Комбинирование соседних клеток в таблицах сопряженности признаков. Крейг (Combination of neighboring cells in contingency tables. Craig C. C.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 261, 104—112 (англ.)

При использовании χ^2-метода для проверки гипотезы независимости распределения численностей в таблицах сопряженности признаков на практике часто встречаются с трудностями, вызванными малой частотой некоторых клеток таблицы; при этом обычные асимптотические формулы не применимы. Обычные рекомендации учебников предусматривают лишь весьма грубые процедуры для получения оценок в этих случаях — объединение целых строк или колонн между собой.

Автор достигает заметного уточнения, рекомендуя производить в нужных случаях объединение соседних клеток одного и того же ряда или клеток, образующих 2×2 блок, или объединение двух клеток одной строки и одновременное объединение двух клеток, стоящих в тех же столбцах некоторой другой строки. Автор показывает, как в этих случаях следует изменить оценку итоговых вероятностей по строкам и столбцам таблицы, если воспользоваться приемом, который Крамер называет видоизмененным методом χ^2 (Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1948). *Н. В. Смирнов*

1742. Критерии значимости для 2×2 таблиц сопряженности признаков: расширение таблиц Финни. Лача (Tests of significance in a 2×2 contingency table: extension of Finney's table. Latscha R.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 74—86 (англ.)

Приводятся вычисленные автором таблицы, представляющие расширение таблиц Финни, служащих для проверки гипотезы независимости в 2×2 таблицах сопряженности признаков (contingency tables) (см., например, Крамер Г., Математические методы статистики, Изд-во иностр. литры, М., 1948) при помощи приема, разработанного Финни (Finney D. J., Biometrika, 1948, **35**, 145—146). *Н. В. Смирнов*

1743. Общие замечания о дисперсионном анализе. Шрейнер (Allgemeine Betrachtungen zur Varianzanalyse. Schreiner W.), Z. Acker- und Pflanzenbau, 1953, **96**, № 2, 195—200 (нем.)

Замечания о терминах, о вычислениях в дисперсионном анализе и об ошибках при использовании его в работах ряда немецких авторов. *В. И. Романовский*

1744. Заметка о прямоугольных решетках. Наир (A note on rectangular lattices. Nair K. R.), Biometrics, 1953, **9**, № 1, 101—106 (англ.)

Рассматриваются несколько частных случаев приложения дисперсионного анализа, в которых результаты повторных экспериментов при наличии исследуемых факторов распределяются по прямоугольной схеме особого вида. Заметка примыкает к одной из предшествующих работ автора (Nair K. R., Biometrics, 1951, **7**, 145—154). *Н. В. Смирнов*

1745. Оценка функциональной связи. Линдли (Estimation of a functional relationship. Lindley D. V.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 47—49 (англ.)

Поддерживается точка зрения Берксона (Berkson J., J. Amer. Statist. Assoc., 1950, **45**, 164—180) о возможности применения обычных методов оценки линейной функциональной зависимости $V = \alpha + \beta U$ в том случае, когда измеряемые значения случайных величин U и V содержат ошибки. Работа Берксона подвергалась критике в статье Кендалла (Kendall M. G., Biometrika, 1952, **39**, 96). *И. И. Гихман*

1746. Оценка наследственных признаков при помощи регрессии потомства по родителям. Кемпторн, Тандон (The estimation of heritability by regression of offspring on parent. Kempthorne O., Tandon O. B.), Biometrics, 1953, **9**, № 1, 90—100 (англ.)

На примере оценки наследственных свойств дается приближенное решение следующей задачи теории регрессии.

Пусть при одном и том же значении переменного $x = x_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ производится группа из n_i наблюдений $y_{ij}\,(j = 1, 2, \ldots, n_i)$ величины y.

Предполагается:

$$E(x_i) = \mu;\ E(y_{ij}) = \mu_y;\ D(x_i) = D(y_{ij}) = \sigma^2;$$

$$\operatorname{cov}(y_{ij}, x_i) = \beta\sigma^2,\ \operatorname{cov}(y_{ij}, y_{ij'}) = \rho_1\sigma^2;$$

$$\operatorname{cov}(y_{im}, y_{ik}) = \operatorname{cov}(x_i, y_{ik}) = \operatorname{cov}(x_i, x_j) = 0\ (i \neq j).$$

Оценке подлежит коэффициент регрессии β. Метод рекомендуемый автором, основывается на предварительной грубой оценке величины $T = \frac{\rho_1 - \beta^2}{1 - \rho_1}$; если приближенное значение ее τ дано, то для оценки β служит характеристика

$$\hat{\beta} = \sum_i w_i (x_i - \bar{x}) y_i / \sum w_i (x_i - \bar{x})^2,$$

где

$$w_i = n_i/(1 + n_i \tau), \quad \bar{x} = \sum w_i x_i / \sum w_i.$$

Найденное значение $\hat{\beta}$ позволяет получить уточненное приближение $\hat{T}$ для T и путем итерации улучшить еще оценку $\hat{\beta}$; приведен пример расчета $\hat{\beta}$ и его дисперсии. *Н. В. Смирнов*

1747. О предельных распределениях крайних членов вариационного ряда двумерной случайной величины. Финкельштейн Б. В., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 2, 209—211

Рассматривается n двумерных случайных величин $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ с одним и тем же законом распределения $F(x, y)$ и составляются вариационные ряды, соответственно, из первой и второй компонент этих величин:

$$\xi_1^{(n)} \leqslant \xi_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_n^{(n)},$$
$$\eta_1^{(n)} \leqslant \eta_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_n^{(n)}.$$

Вводятся обозначения:

$$u_n(x) = nF(a_n x + b_n, \infty),$$
$$v_n(y) = nF(\infty, c_n y + d_n),$$
$$w_n(x, y) = nF(a_n x + b_n, c_n y + d_n),$$

где $a_n > 0$, b_n, $c_n > 0$, d_n — постоянные.

Изучается сходимость распределения $\Phi^{(n)}(x, y)$ случайной величины

$$\left(\frac{\xi_1^{(n)} - b_n}{a_n}, \frac{\eta_1^{(n)} - d_n}{c_n} \right)$$

к предельному распределению $\Phi(x, y)$, причем эта сходимость понимается как сходимость в каждой точке непрерывности $\Phi(x, y)$.

Формулируется следующая теорема:

Для того чтобы при $n \to \infty$

$$\Phi^{(n)}(x, y) \to \Phi(x, y),$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &\to u(x) \\ v_n(y) &\to v(y) \\ w_n(x, y) &\to w(x, y) \end{aligned}\right\} \quad (n \to \infty),$$

где функции $u(x)$, $v(y)$ и $w(x, y)$, удовлетворяющие условиям: $u(\infty) = \infty$, $v(\infty) = \infty$, $w(x, \infty) \not\equiv \infty$, $w(\infty, y) \not\equiv \infty$, однозначно определяются по $\Phi(x, y)$ уравнением

$$\Phi(x, y) = 1 - e^{-u(x)} - e^{-v(y)} + e^{-u(x) - v(y) + w(x, y)}. \quad (1)$$

Пусть

$$R(x, y) = \frac{w(x, y)}{\sqrt{u(x)\, v(y)}}.$$

Указываются необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $u(x)$, $v(y)$ и $R(x, y)$ для того, чтобы функция $\Phi(x, y)$, определенная по (1), могла быть (при надлежащей нормировке) предельным законом для $(\xi_1^{(n)}, \eta_1^{(n)})$. *С. Х. Туманян*

1748. О теоремах полноты классов Вальда. Кифер (On Wald's complete class theorems. Kiefer J.), Ann Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 70—75 (англ.)

В заметке дается доказательство нескольких теорем о полноте классов стратегий, формулированных ранее в работе автора (Bull. Amer. Math. Soc., 1951, **57**, 372). *Н. В. Смирнов*

1749. Вычисление средней квадратической ошибки при помощи карт с параболической шкалой. Римендьотти (Calcul de l'erreur quadratique moyenne par l'emploi de cartes graduées monoparaboliques. Rimendiotti Ugo), Rev. métrol. prat. et légale, 1953, **13**, № 3, 144—148 (франц.)

Указывается простой способ графического расчета средней квадратической ошибки при помощи карт с линейной шкалой по оси абсцисс и квадратичной — по оси ординат. Приведены примеры вычислений. *Н. В. Смирнов*

1750 РЖ. Планирование и анализ экспериментов. Кемпторн (The design and analysis of experiments. Kempthorne Oscar, pp. 631, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1952, 8.50 doll.) [**Рецензия: Робертсон** (Robertson Margaret J.), Yale J. Biol. and Med., 1953, **25**, № 6, 550 (англ.)]

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ

1751. К статистической теории данных, полученных при помощи счетчика. Альберт, Нелсон (Contributions to the statistical theory of counter data. Albert G. E., Nelson Lewis), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 1, 9—22 (англ.)

Предлагается новая математическая модель для описания действия счетчиков Гейгер — Мюллера и аналогичных им, предназначенных для подсчета числа событий, наступающих одно за другим через случайные промежутки времени. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \quad (1)$$

такая последовательность событий. Устройство счетчиков не позволяет, как правило, регистрировать наступление каждого из событий последовательности (1). Поэтому события, зарегистрированные счетчиком, образуют некоторую подпоследовательность

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \quad (2)$$

последовательности (1). Чтобы описать математически действие счетчика, необходимо задать правило («правило отбора»), по которому из последовательности (1) образуется (2). В литературе подробно рассмотрены две модели счетчиков (см., например, Feller W., On probability problems in the theory of counters, R. Courant anniversary volume, 1948, 105—115). В счетчиках первого типа событие e_n регистрируется в том и только в том случае, если в предшествующий промежуток времени фиксированной длины u не произошло ни одной регистрации. В счетчиках второго типа событие из (1) регистрируется в том и только том случае, если в предшествующий промежуток времени длины u не произошло ни одного из событий (1).

Авторы формулируют довольно сложное «правило отбора», в которое входит произвольный параметр θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, причем значениям $\theta = 0$ и $\theta = 1$ соответствуют первый и второй типы счетчиков, указанные выше. В предположении, что счетчик начинает работу в момент времени $t = 0$ и события (1) наступают в соответствии с законом Пуассона, в среднем m раз в единицу времени, находится точное выражение для функции распределения $H_N(t; m, \theta)$ времени до N-ой регистрации и асимптотические выражения для квантилей H_N при $N \to \infty$. Далее, для параметра m строятся доверительные границы. Построение доверительных границ иллюстрируется численными примерами.

Ю. В. Прохоров

1752. Задачи теории шумов, имеющие теоретический и практический интерес. Янг, Голд (Noise problems of theoretical and practical interest. Young G. O., Gold B.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, № 8, 2—6 (англ.)

Обзорная статья. Рассматриваются методы расчета статистических характеристик функции на выходе линейной или нелинейной системы, находящейся под воздействием случайных «шумов». Случай нелинейной системы иллюстрируется примером системы, состоящей из последовательно включенных линейного RC-фильтра, квадратичного детектора и второго RC-фильтра; в качестве методов расчета характеристик на выходе такой системы указываются: метод уравнений Фоккера — Планка, метод Каца — Зигерта (Kac M., Siegert J., J. Appl. Phys., 1947, **19**, 383—397) и приближенный метод, опирающийся на разложение распределений вероятностей в ряд Эджворта.

Л. М. Яглом

1753. О времени между авариями. Заметка на статью Магуайра, Пирсона и Уинна. Барнард (Time intervals between accidents—a note on Maguire, Pearson and Wynn's paper. Barnard G. A.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 212—213 (англ.)

В заметке подвергаются статистическому анализу данные о промышленных авариях с 1 декабря 1875 г. по 29 мая 1951 г., приведенные в статье Магуайра, Пирсона, Уинна (Maguire B. A., Pearson E. S., Wynn A. H. A., Biometrika, 1952, **39**, 168—180).

Предполагая моменты возникновения аварий независимыми друг от друга, автор рассматривает две гипотезы относительно распределения момента аварии: 1) распределение равномерно в интервале времени (0, T); 2) плотность распределения пропорциональна e^{-kt}.

Пользуясь критерием согласия А. Н. Колмогорова, автор отбрасывает гипотезу 1) и находит, что при $k = 1/20\,000$ гипотеза 2) согласуется с изучаемыми данными. Следует заметить, что подобная вероятностная задача изучалась ранее А. А. Ляпуновым и С. М. Фандюшиной (см. Ляпунов А. А., Фандюшина С. М., Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1950, **14**, № 6, 547—552).

В. С. Михалевич, Л. В. Скороход

1754. Допуски и контроль качества. Колен (Tolérances et contrôle qualité. Colin P.), Prat, inds mec., 1953, **36**, № 5, 131—138 (франц.)

Популярная статья, предназначенная для первого ознакомления с простейшими приемами статистического анализа и контроля продукции автоматических станков.

Детально разбирается один конкретный числовой пример. Приводится краткое чисто описательное рассмотрение некоторых наиболее характерных типов распределения производственных погрешностей, в связи с возможными расположениями кривых этих распределений относительно поля допуска. Кроме того, дается понятие об условиях образования нормального распределения и о кривой распределения, получающегося в результате смешения партий, размеры изделий каждой из которых следуют нормальным законам с различными центрами.

Г. И. Егудин

1755. Принципы технического контроля в металлургической промышленности. Сингер (The principles of technical control in metallurgical manufacture. Singer A. R. E.), J. Inst. Metals, 1953, **20**, № 7, 329—340 (англ.)

1756. Оценка больших партий материалов и методы математической статистики. Риги (Il collaudo delle grandi partite di materiali ed i metodi della statistica matematica. Righi Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1953, **8**, № 5, 343—356 (итал.)

Излагаются на основе американской литературы хорошо известные основные сведения о статистических методах приемочного контроля.

В. И. Романовский

1757. Биологическое опробование и математика. Гаддум (Bioassays and mathematics. Gaddum J. H.), Pharmacol. Revs, 1953, **5**, № 1, 87—134 (англ.)

В статье дается детальное освещение различных вопросов, связанных со статистической методикой биологического опробования, т. е. обработка экспериментов, в которых сила действия некоторых медикаментов измеряется эффектом выживания подвергаемых опыту организмов или тканей. К статье приложена библиография в 208 названий.

Н. В. Смирнов

1758. Упрощенные математические методы биологического опробования. Гаддум (Simplified mathematics for bioassays. Gaddum J. H.), J. Pharmacy and Pharmacol., 1953, **5**, № 6, 345—358 (англ.)

Популяризируются элементарные приемы математической статистики, используемые при обра-

ботке экспериментов, поставленных с целью получения оценки степени действия различных препаратов и лекарств на живые организмы.

Статья связана с другой работой автора (см. реф. 1757). *Н. В. Смирнов*

1759. Оценка параметров популяции по данным, полученным методом повторного отлова. Лесли, Читти, Читти (The estimation of population parameters from data obtained by means of the capture-recapture method. Leslie P. H., Chitty Dennis, Chitty Helen), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 137—169 (англ.)

Дается обстоятельный анализ практического приложения метода повторного отлова к оценке численности популяции. При этом методе животные, попавшие в первую выборку, отмечаются и возвращаются в популяцию, из которой через некоторое время вновь берется выборка; в этой последней определяется доля отмеченных при первой выборке животных. Теоретическое рассмотрение этого метода дано в двух предшествующих работах авторов (Leslie P. H., Biometrika, 1952, **39**, 363—388; Leslie P. H., Chitty D., Biometrika, 1951, **38**, 269—292). На примере популяции грызунов обсуждаются возможные погрешности, связанные с техникой применения метода. *Н. В. Смирнов*

1760 РЕЦ. Выборочный контроль и индустриальная статистика. Дункан (Quality control and industrial statistics, Duncan Acheson J., pp. XXVII + 663, Richard D. Irwin, Inc., Chicago, 1952, 9 doll.) [**Рецензия: Кокс** (Cox D. R.), Biometrika, 1953, **40**, № 1—2, 234—235 (англ.)]

1761 РЕЦ. Статистическая теория и ее применение в технике. Халль (Statistical theory with engineering applications. Hald A., pp. XII — 783, John Wiley and Sons, N. Y., 1952, 9.00 doll.) [**Рецензии: Баукер** (Bowker A. H.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 6, 431 (англ.); **Вотау** (Votaw D. F., Jr.), Amer. Scientist, 1953, **41**, № 3, 471 (англ.)]

1762 РЕЦ. Статистическая теория в исследовательской работе. Андерсон, Банкрофт (Statistical theory in research. Anderson R. L., Bancroft T. A., pp. XVI + 399, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1952, 7.00 doll.) [**Рецензия: Блит** (Blyth C. R.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 6, 432—433 (англ.)]

1763 РЕЦ. Руководство по статистическим методам в метеорологии. Брукс, Карратерс (Handbook of statistical methods in meteorology. Brooks C. E. P., Carruthers N., pp. VIII + 421, 75 illustr., H. M. Stationery office, London, 1953, 25 s.) [**Рецензия**: (D. H. T.), Instn Water Engrs, 1953, **7**, № 4, 386 (англ.)]

1764 РЕЦ. Статистический метод в биологии. Финни (Statistical method in biological assay. Finney D. J., pp. XIX + 661, Griffen, 1952, 68 s.) [**Рецензия: Бейли** (Bailey Norman T. J.), Heredity, 1953, **7**, ч. 2, 294—295 (англ.)]

1765 Д. Определение величины резерва мощности энергетической системы методом вероятностного анализа. Дмитриев С. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1953

1766 Д. Ошибки положения точек и методы их учета в геодезическом деле. Плотникова В. К. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. ин-т инж. землеустройства, М., 1953

См. также: 1517, 1518, 1701 РЕЦ

ГЕОМЕТРИЯ

1767. Замечательные кривые. Степанов Ю., Знание — сила, 1953, № 8, 15—17

1768. Естественное превращение кривой в ее эволюту. Лохер-Эрнст (Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute. Locher-Ernst L.), Elem. Math., 1953, **8**, № 4, 73—75 (нем.)

Для каждой точки P плоской кривой рассматривается касательная t_P. Повернем все касательные t_P около точек касания P на один и тот же угол α в одинаковом направлении; прямые, полученные в результате этого поворота, обозначим через g_P. Огибающая прямых g_P называется эволютоидой данной кривой.

При непрерывном возрастании угла α от 0 до π эволютоида непрерывно деформируется от исходной кривой ($\alpha = 0$), превращаясь в эволюту $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ и снова возвращаясь к исходной кривой ($\alpha = \pi$). При этой деформации исходная точка кривой пробегает окружность. Если g_P вращается с постоянной угловой скоростью ω, то точка X деформирующейся эволютоиды, выходящая из начального положения P, пробегает эту окружность с постоянной скоростью $\omega\rho_P$ (ρ_P — радиус кривизны). *Н. М. Бескин*

1769. Элементарная теория неевклидовых геометрий. Тресс (Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes. Tresse M. A.), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 2, 81—143 (франц.)

Используя идею Пуанкаре интерпретации геометрии Лобачевского в круге, автор различает геометрии трех родов: евклидову, Лобачевского и Римана, в зависимости от того, будет ли фундаментальная окружность вырождаться в точку, или окажется действительной невырождающейся, или будет мнимой. Каждая из этих геометрий рассматривается как совокупность свойств геометрических образов, инвариантных относительно инверсий,

оставляющих неизменной фундаментальную окружность.

Изучаются осевые и центральные псевдосимметрии и дается понятие об отрезках псевдопрямых, имеющих равные длины, а это приводит к понятиям окружности, гиперцикла и орицикла. Много внимания уделено классификации и изучению псевдоперемещений как точечных преобразований, не меняющих псевдорасстояния двух точек.

Рассматриваются различные виды симметрий двух и трех точек и псевдопрямых и в связи с этим описанные и внеописанные, вписанные и вневписанные псевдоокружности треугольника. Дается простое построение треугольника по трем его углам, исследование которого приводит к известному свойству суммы внутренних углов треугольника, характеризующему каждую из трех геометрий. Существенно новых результатов работа не содержит. Ожидается опубликование продолжения работы. *К. К. Мокрищев*

1770. Характеристика систем всех кругов с неисчезающим радиусом евклидовой плоскости. Буккель (Eine Kennzeichnung des Systems aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius der euklidischen Ebene. Buckel Walter), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1—2, 13—29 (нем.)

Пусть S — система точечных множеств евклидовой плоскости E_2, которая обладает следующими свойствами: 1) S содержит по меньшей мере два различных элемента; 2) каждый элемент системы S содержит по меньшей мере две различные точки и каждые две точки этого элемента можно соединить куском кривой (топологическим образом отрезка), целиком принадлежащей этому элементу; 3) для любых трех точек E_2 найдется элемент из S, содержащий эти три точки; 4) любое перемещение E_2 переводит S само в себя.

В работе доказывается следующее утверждение: условия 1—4 характеризуют систему всех окружностей с неисчезающим радиусом среди всех систем точечных множеств E_2. Для доказательства этого предложения устанавливается, что: а) система точечных множеств, удовлетворяющих этим четырем условиям, содержит в качестве элемента каждую окружность с неисчезающим конечным радиусом; б) эта система содержит каждую прямую; в) она не содержит никаких других элементов. При доказательстве используются обычные понятия теории множеств и преобразования движения евклидовой плоскости. *Р. М. Гейдельман*

1771. Заметка по геометрии такси. Кертис (A note on the taxicab geometry. Curtis H. J.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 6, 416—417 (англ.)

Автор, следуя Менгеру (Menger K., You will like geometry, Chicago, 1952), рассматривает геометрию уличной сети, разрезающей город на квадратные блоки. Расстояние между двумя точками («расстояние по такси») определяется как длина кратчайшего пути вдоль улиц, соединяющего эти точки. Если длину блока принять за единицу, то перекрестки будут иметь обе координаты целочисленными, а каждая из остальных точек — только одну из координат целой. Расстояние между точками $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$ определяется формулой

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

(представляющей метрику Минковского для случая $n = 1$), если только точки P_1 и P_2 не лежат в пределах одной и той же горизонтальной (или вертикальной) полосы. В этих случаях, обозначая $z' = z - [z]$, где $[z]$ — наибольшее целое число, не превосходящее z, имеем

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + \min(y_1' + y_2', 2 - y_1' - y_2').$$

когда $[y_1] = [y_2]$, и

$$d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2| + \min(x_1' + x_2', 2 - x_1' - x_2'),$$

когда $[x_1] = [x_2]$.

Точки, удаленные от какого-либо перекрестка Q на расстояние r, располагаются на пересечении уличной сети с границей квадрата $D(Q, r)$, имеющего центр в Q, диаметр $2r$ и диагонали вдоль улиц. В случае, когда центр P не является перекрестком (а удален от ближайших перекрестков Q_1 и Q_2 на расстояния k и $1 - k$), «окружностью» $C(P, r)$ в рассматриваемой неевклидовой геометрии служит множество точек уличной сети, лежащих на границе невыпуклого восьмиугольника

$$D(Q_1, r - k) + D(Q_2, r + k - 1).$$

А. Г. Школьник

1772. О формах основных уравнений геометрии механизмов. Морошкин Ю. Ф., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 4, 745—748

1773. К вопросу о теоретической форме профиля зуба, нарезаемого эвольвентной фрезой. Кислицын С. Г., Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1953, **89**, 145—151

С неподвижной системой $OXYZ$ связана заготовка, с системой $O_2X_2Y_2Z_2$ — фреза. В начальный момент O_2Y_2 совпадает с OY, $O_2X_2 \parallel OX$, в системе $OXYZ$ точка O_2 имеет координаты $0, -h, 0$, а система $O_2X_2Y_2Z_2$ совпадает с системой $O_1X_1Y_1Z_1$.

Последняя вращается вокруг OX с угловой скоростью b, а относительно $O_1X_1Y_1Z_1$ система $O_2X_2Y_2Z_2$ совершает поступательное движение со скоростью v параллельно O_1X_1 и вращательное вокруг O_2Z_2 с угловой скоростью a. Все скорости постоянны. Связанная с $O_2X_2Y_2Z_2$ эвольвентная винтовая поверхность, у которой ось совпадает с O_2Z_2, радиус основного цилиндра R, угол наклона образующих к X_2Y_2 равен γ, образует в $OXYZ$ семейство геликоидов. Огибающая этого семейства в сечении с плоскостью YOZ дает профиль нарезаемого зуба, который и требуется найти.

Векторным методом составляется уравнение образующей геликоида в произвольный момент времени t:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^* + \lambda\,\bar{\omega}, \text{ где } \bar{\rho}^* = \alpha\,\bar{\omega} + [\bar{\omega}\bar{\mu}],$$
$$\alpha = ((\bar{u}\,\bar{\omega})(\bar{\mu}\,[\bar{u}\bar{\omega}]) - (\bar{m}\,[\bar{u}\bar{\omega}]))/|[\bar{u}\,\bar{\omega}]|^2;$$

орты и моменты рассматриваемой образующей и оси геликоида обозначены соответственно через $\bar{\omega}$, $\bar{\mu}$ и $\bar{u}$, $\bar{m}$; λ определяет положение текущей точки на образующей.

При составлении уравнения семейства геликоидов применяется тензорный метод и винтовое

исчисление. Через $\hat{e}$ обозначается направляющий винт прямой l — образующей геликоида: $\hat{e} = \bar{l}^0 + \omega\bar{m}_1$, $\bar{l}^0 = \{0, \cos\gamma, \sin\gamma\}$, $\bar{m}_1$ — момент l. Аффинор $\bar{\bar{A}}$ после умножения его на $\hat{e}$ слева поворачивает l на комплексный угол $\varphi = \varphi_0 + \omega\varphi_1$ вокруг OZ.

Вещественная часть $\varphi_0 = at + \delta$, дуальная часть $\varphi_1 = p\delta$, p — параметр основной винтовой линии геликоида, δ — угол, определяющий образующую геликоида.

Аффиноры: $\bar{\bar{T}}$, при умножении его на винты слева, преобразует $OXYZ$ в $O_1X_1Y_1Z_1$, $\bar{\bar{B}}$ — сообщает прямым вращение вокруг OX на комплексный угол $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$, $\psi_0 = bt$, $\psi_1 = vt$. Направляющий винт произвольной образующей подвижного геликоида имеет вид $\hat{e}\bar{\bar{A}}\bar{\bar{T}}\bar{\bar{B}}$, а оси O_2Z_2 равен $\hat{k}\bar{\bar{T}}\bar{\bar{B}}$. Вещественные и дуальные части компонент двух предыдущих винтов соответственно дают компоненты ортов $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ и моментов $\bar{\mu}$, $\bar{m}$. Уравнение семейства геликоидов имеет вид: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u, \lambda, t) = \{x = R\cos u - \lambda\cos\gamma\sin u + vt;\ y = g\cos bt - p\delta\sin bt + \lambda(\cos\gamma\cos bt\cos u - \sin\gamma\sin bt);\ z = g\sin bt + \delta p\cos bt + \lambda(\cos\gamma\sin bt\cos u + \sin\gamma\cos bt)\}$, где $u = at + \delta$, $g = R\sin u - h$.

Огибающая получается присоединением условия $(\bar{\rho}_u\ \bar{\rho}_\lambda\ \bar{\rho}_t) = 0$, а профиль нарезаемого зуба дополнительным присоединением $x = 0$. *В. С. Люкшин*

1774 К. Ошибки в геометрических доказательствах. Дубнов Я. С., 68 стр., Гостехиздат, М., 1953, 95 коп. (Популярные лекции по математике, вып. 11)

Брошюра содержит ряд примеров ошибочных геометрических рассуждений (как относящихся к началам элементарной геометрии, так и связанных с понятием предела) и анализ этих примеров, выясняющий ошибки. От других сборников математических софизмов (см., например, Литцман В., Трир Ф., Где ошибка?, Гостехиздат, М.—Л., 1932) книга отличается более тщательным разбором причин, вызвавших ошибки. *И. М. Яглом*

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

1775. Об одной задаче n-мерной геометрии. Нисневич Л. Б., Брызгалов В. И., Усп. мат. наук, 1953, 8, № 4 (56), 169—172

Доказывается следующее предложение:

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве заданы n взаимно ортогональных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с длинами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а также фиксировано некоторое натуральное число $m \leqslant n$. Для того чтобы существовало m-мерное линейное подпространство, на которое векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют проекции равной длины, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\alpha_i^2\left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^2}\right) \geqslant m \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Примечание референтов. Это предложение тривиальным образом эквивалентно такому: для того чтобы существовало m-мерное линейное подпространство, составляющее с n взаимно ортогональными векторами углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cdots + \cos^2\varphi_n = m;$$

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В. А. Ефремович, А. С. Шварц

1776. Полуортоцентрический тетраэдр. Корт (The semi-orthocentric tetrahedron. Court N. A.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 5, 306—310 (англ.)

Автор называет полуортоцентрическим тетраэдр, два противоположных ребра которого ортогональны, и устанавливает некоторые его свойства. Так, например, тетраэдр является полуортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) средние точки двух пар противоположных ребер тетраэдра являются вершинами прямоугольника; 2) окружности девяти точек двух граней тетраэдра принадлежат сфере; 3) перпендикуляры, восставленные к двум граням тетраэдра в соответствующих ортоцентрах, пересекаются.

Н. В. Лактанова

1777. Неконциклические множества точек. Гупта (Non-concyclic sets of points. Gupta Hansraj), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, 19, № 2, 315—316 (англ.)

Методом полной индукции по числу точек n доказывается следующая теорема: если даны n различных точек плоскости и окружность, проходящая через три любые из них, содержит также и четвертую, то все n точек принадлежат одной окружности (концикличны). Эта теорема является аналогом известной теоремы об условии принадлежности точек одной прямой; в формулировке ее «окружность» включает также и прямую. Автор указывает и на дальнейшие обобщения (например, о принадлежности n точек одной сфере).

Если n точек неконцикличны, то g-окружностью называется окружность, проходящая через три и только три точки совокупности; автор высказывает гипотезу, что число g-окружностей неконциклической системы точек $g(n) \geqslant 4$. *В. В. Рыжков*

1778. Об эквивалентности многогранников с рациональными двугранными углами. Сидлер (Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels. Sydler J.-P.), Elem. Math., 1953, 8, № 4, 75—79 (франц.)

Два многогранника называются эквивалентными (mod 0), если один из них разлагается на конечное число частей (многогранников), из которых можно составить другой, дополненный кубом. Для эквивалентности в этом смысле двух многогранников необходимо, чтобы они удовлетворяли условиям Дена. В предыдущей работе автора (Elem. Math., 1952, **7**, № 3, 49—53) было доказано, что если два многогранника удовлетворяют условиям Дена, то их разность эквивалентна многограннику, все двугранные углы которого рациональны.

О понятии «разность многогранников» см. работу Хадвигера (Hadwiger H., Comment. math. helv., 1950, **24**, № 3, 204—218), где рассматриваются и другие понятия линейной алгебры. Для образова-

ния разности из многогранника вычитаются в теоретико-множественном смысле части (из которых составлен другой многогранник), подобно измененные, вообще говоря, с различными коэффициентами подобия. В настоящей работе доказывается теорема: многогранник, все двугранные углы которого рациональны, эквивалентен многограннику, все двугранные углы которого кратны $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, если два многогранника удовлетворяют условиям Дена, то их разность эквивалентна многограннику, все двугранные углы которого кратны $\frac{\pi}{4}$.

Автор высказывает предположение, что всякий многогранник, все двугранные углы которого кратны $\frac{\pi}{4}$, эквивалентен кубу. Если это подтвердится, то тем самым будет обнаружено, что условия Дена не только необходимы, но и достаточны для эквивалентности двух многогранников.

Н. М. Бескин

1779 РЕЦ. Делийская проблема. Брейденбах (Das Delische Problem. Breidenbach W., S. 59, Teubner, Leipzig, 1952, 2. Aufl., 34 Abb) [**Рецензия: Штрёэр** (Ströher W.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 37—38 (нем.)]

В книге рассматриваются вопросы геометрических построений циркулем и линейкой.

1780 РЕЦ. Начертательная геометрия с введением в техническую перспективу. Поль (Darstellende Geometrie mit einer Einführung in die technische Perspektive. Technische Fachbuchreihe für Studium und Praxis. Pohl W., S. 224, Bild. 704, Taf. 6, Pädagogischer Verlag Berthold Schulz, Berlin-Hannover-Frankfurt/M., 1951, 15. 20 DM) [**Рецензия: Ребок** (Rehbock F.), Feinwerktechnik, 1953, **57**, № 4, 130 (нем.)]

1781 РЕЦ. Упражнения по проективной геометрии. Херман (Übungen zur projektiven Geometrie. Herrmann H., S. 168, Verlag Birkhäuser, Basel, 1952, sFr. 14) [**Рецензия: Егер** (Jeger M.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 3, 226—227 (нем.)]

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1782. О метрике алгебраических кривых. Казанова (Sur la métrique des courbes algébriques. Casanova G.), Rev. math. spéc., 1953, **63**, № 12, 565—567 (франц.)

Продолжая свои исследования (см. РЖМат, 1953, 1364), автор получил следующие результаты:

I. Циркулярные алгебраические кривые порядка $n+1$, которые проходят через все n^2 точек пересечения двух кривых (C_1) и (C_2) и через две точки A_1 и A_2, произвольно взятые соответственно на (C_1) и (C_2), проходят и через $2n-3$ точки, принадлежащие окружности, вписанной в угол ω данных кривых и проходящей через точки A_1 и A_2.

II. 1) Через две точки плоскости проходит единственная псевдопрямая; через точку, лежащую вне данной псевдопрямой, проходит единственная псевдопрямая, параллельная данной псевдопрямой. Псевдопрямой (fausse-droite) Ладопулос (Ladopoulos, Bull. Soc. Math. Grèce, 1949, **24**) назвал коническое сечение, проходящее через три фиксированные точки и через две другие точки плоскости.

2) Две псевдопрямые, параллельные третьей F_1, параллельны между собой.

3) Если три псевдопрямые F_1, F_2, F_3 образуют треугольник с углами ω_{12}, ω_{23}, ω_{31}, то сумма этих углов равна нулю.

4) Если две параллельные псевдопрямые F_1 и F_2 пересечены третьей F_3, им не параллельной, то $\omega_{13}=\omega_{23}$.

III. Эти результаты обобщаются, причем не все свойства сохраняются.

1) Чтобы точки пересечения кривых (C_1) и (C_2), которые имеют изотропные направления асимптотическими направлениями порядка p (p — целое положительное число или нуль), лежали на некоторой кривой, имеющей эти изотропные направления своими асимптотическими направлениями порядка $n \geqslant 2p+2$, необходимо и достаточно, чтобы оси кривых (C_1) и (C_2) были параллельны.

2) Если $n \geqslant 2p+2$ (p — целое число или нуль), то алгебраические кривые порядка $n+1$, которые имеют изотропные направления своими асимптотическими направлениями порядка $p+1$, проходят через все n^2 точек пересечения (C_1) и (C_2) и через точки A_1 и A_2, соответственно взятые на (C_1) и (C_2), пройдут и через $2n-4p-3$ точки, принадлежащие окружности, на которой лежат точки A_1 и A_2 и которая вписана в угол ω данных кривых.

3) Углы q алгебраических кривых порядка n, которые имеют изотропные направления своими асимптотическими направлениями порядка p ($n > 2p \geqslant 0$), связаны соотношением

$$\omega_{12}+\omega_{23}+\cdots+\omega_{ij}+\cdots+\omega_{p1}=0.$$

М. П. Черняев

1783. Об эффективной кратности поляр. Весентини (Sulle molteplicità effettive delle curve polari. Vesentini Edoardo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 2, 209—212 (итал.)

Резюме статьи того же автора (см. реф. 1784). Отмечается ошибочность одного утверждения в статье Кампеделли «Об особенностях алгебраических кривых» (Campedelli L., Atti. Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **13**, 234—238).

Я. П. Бланк

1784. О поведении полярной кривой в кратных точках. Весентини (Sul comportamento effettivo delle curve polari nei punti multipli. Vesentini Edoardo), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 219—245 (итал.)

Пусть C — плоская алгебраическая кривая, заданная уравнением $f(x, y, z)=0$, O — ее кратная точка и $C'(P)$ — первая поляра точки $P(x_0, y_0, z_0)$ относительно C, т. е. кривая

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

В работе исследуется поставленный Энриквесом (Enriques F., Atti della Reale Accad. naz. Lincei, Rend., 1916, 25,607—613) и Сегре вопрос о поведении $C'(P)$ в O. При исследовании предполагается, что через O проходит

единственная ветвь C и P не лежит на касательной к C в точке O. При исследовании применяется многоугольник Ньютона с широким использованием метода непрерывных дробей. Выводится ряд соотношений, позволяющих определить структуру особенности $C'(P)$ в O в том случае, когда C — произвольная кривая из семейства Σ алгебраических кривых, имеющих в O заданную особенность. Структура эта оказывается существенно зависящей от выбора C в Σ.

Автор уделяет много внимания изучению закона альтернативности Энриквеса, относящегося к поведению $C'(P)$ (Enriques F., Chisini O., Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Vol. II, pp. 441, Bologna, 1918), и показывает, что он имеет место в том случае, когда P — производящая точка плоскости, а C — производящая кривая семейства Σ. *В. В. Морозов*

1785. О пучке обобщенных десмических поверхностей. Годо (Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées. Godeaux Lucien), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, № 3, 232—244 (франц.)

Десмическими называются поверхности, принадлежащие пучку, содержащему три поверхности, вырождающиеся в четыре плоскости. В заметке, являющейся продолжением работы того же автора (Acad. roy. Belgique, Bull. cl.sci., 1952, **38**, 892—897), рассматривается пучок обобщенных десмических поверхностей порядка $4n$ при $n>2$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^{4n} - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{4} (x_i x_j)^{2n} + \lambda (x_1 x_2 x_3 x_4)^n = 0.$$

Строятся уравнения присоединенных поверхностей пучка, вычисляются его арифметический и геометрический жанры p_a и p_g и иррегулярность. Последняя имеет вид

$$p_g - p_a = \begin{cases} \frac{1}{12} n(n^3 - 12n^2 + 50n - 48) & \text{при } n = 2\nu, \\ \frac{1}{12} (n^4 - 12n^3 + 50n^2 - 48n + 9) & \text{при } n = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Так как при $n = 2$ иррегулярность поверхностей пучка равна 2, то отсюда следует, что при $n \geqslant 2$ все поверхности пучка иррегулярны. *В. В. Морозов*

1786. О трехмерных алгебраических многообразиях линейного жанра единица. Рот (On threefolds of linear genus unity. Roth Leonard), Ann. mat. pura ed appl., 1953, сер. 4, **34**, 247—276 (англ.)

Дается классификация трехмерных алгебраических многообразий V_3 линейного жанра 1. При условии, что V удовлетворяет некоторым дополнительным предположениям, указываются четыре основных класса таких V_3 I. V_3, для которых все канонические и плюриканонические системы виртуальны; II. V_3, обладающие изолированными каноническими и плюриканоническими поверхностями; III. V_3, для которых эффективные канонические или плюриканонические системы состоят из связки поверхностей виртуальной степени нуль, и, следовательно, характеристические кривые этих систем имеют порядок нуль; IV. V_3, для которых характеристические кривые указанных систем имеют порядок, больший нуля.

Классификация эта ставится в соответствие с классификацией поверхностей линейного жанра 1, установленной Энриквесом (Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949) по их арифметическому жанру и 12-жанру: А. $p_a = -1$, $p_{12} = 0$; Б. $p_a \geqslant -1$, $p_{12} = 1$; В. $p_{12} > 1$, причем В соответствуют классы III и IV.

В каждом классе рассматриваются некоторые подклассы и устанавливается большое число относящихся к ним предложений. Классификация иллюстрирована многочисленными примерами, при построении которых широко используется понятие произведения кривой и поверхности.

Вопрос о полноте данной классификации, как указывает автор, при настоящем состоянии теории остается открытым. Также невозможно дать более или менее полное обозрение даже для отдельных подклассов указанных четырех классов. Так, задача классификации вполне регулярных типов, входящих в класс II, упирается в нерешенный вопрос о классификации регулярных канонических поверхностей.

Работа оставляет большой простор для дальнейших исследований. *В. В. Морозов*

1787. Об инвариантах канонической системы для V_d. Тодд (On the invariants of the canonical system of a V_d. Todd J. A.), Proc. Cambrige Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 410—412 (англ.)

Известны две группы соотношений между арифметическими жанрами Ω_i i-мерных характеристических систем канонической системы алгебраического многообразия V_d: формулы Альбанезе (Albanese G., Ann. mat. pura ed appl. 1927, сер. 4, **4**, 154—184)

$$\sum_{r=0}^{2k} (-1)^r \binom{d-r}{2k+1-r} \Omega_r + \binom{d}{2k} + 1 = 2\Omega_{2k+1}$$

$$(0 \leqslant 2k \leqslant d-1),$$

$$\sum_{r=0}^{2k-1} (-1)^r \binom{d-r}{2k-r} \Omega_r + \binom{d}{2k-1} - 1 = 0$$

$$(2 \leqslant 2k \leqslant d)$$

и формулы Тодда — Максвелла (Todd J. A., Maxwell E. A., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1937, **33**, 438—443)

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \Phi_i = 2(P_a - 1),$$

$$\sum_{i=0}^{d-2k} (-1)^i \left[\binom{k+i-1}{i} + \binom{k+i}{i} \right] \Phi_{d-2k-i} = 0$$

$$(1 < 2k \leqslant d-1,\ d\text{—нечетное}),$$

$$\sum_{i=0}^{d-2k-1} (-1)^i \binom{k+i}{i} \Phi_{d-2k-1-i} = 0$$

$$(0 \leqslant 2k < d-1,\ d\text{—четное}),$$

где $\Phi_0 = \Omega_0$, $\Phi_i = \Omega_i + (-1)^i$ $(1 \leqslant i \leqslant d-1)$,

$\Omega_d = P_a$ равен арифметическому жанру V_d. В заметке при помощи интерполяционных формул Ньютона—Стирлинга и Ньютона—Бесселя показывается эквивалентность обоих видов соотношений.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1788. Об одном частном классе геодезических на линейчатых поверхностях W. Пиларинос (Sur une classe particulière de géodésiques des surfaces réglées W. Pylarinos O.), Bull. sci. math., 1953, **77**, mars-avril, 63—72 (франц.)

Известно, что кривизна $\varkappa$ и кручение σ любой геодезической в каждой точке некоторой поверхности связаны со средней H и полной кривизной K поверхности в этой точке соотношением

$$\varkappa^2 + \sigma^2 - 2H\varkappa + K = 0.$$

Далее, на поверхности W всегда существует зависящее от одного параметра семейство кривых, вдоль которых средняя H и полная кривизна K поверхности сохраняют постоянные значения. Если же такая кривая является геодезической на этой поверхности, то между ее кривизной $\varkappa$ и кручением σ существует соотношение

$$\varkappa^2 + \sigma^2 = \lambda + \mu\varkappa, \qquad (1)$$

где λ и μ — постоянные. Можно поставить вопрос, каково максимальное число геодезических на поверхности W, принадлежащей к заданному классу, кривизна и кручение которых связаны соотношением (1).

В статье изучается этот вопрос для случая линейчатых поверхностей W; геодезические этих поверхностей, обладающие указанным свойством, называются геодезическими W.

Доказательству общего заключения, что линейчатая поверхность W, не являющаяся цилиндром вращения, допускает не более двух геодезических W, предпосланы следующие теоремы:

1. Неразвертывающиеся линейчатые поверхности W (линейчатый гиперболоид вращения и винтовая поверхность) допускают лишь по одной геодезической W. На цилиндре вращения все геодезические суть геодезические W и средняя кривизна вдоль них имеет одно и то же постоянное значение.

2. Развертывающаяся поверхность (исключая цилиндр вращения) не может допускать двух геодезических W, вдоль которых средняя кривизна имеет одно и то же постоянное значение.

3. Развертывающаяся поверхность (исключая цилиндр вращения) допускает не более двух геодезических W.

В заключение отмечается, что кривизна и кручение геодезической на развертывающейся поверхности, допускающей две геодезические W, связаны соотношением вида

$$f\left(\varkappa, \frac{\sigma}{\varkappa}\right) = 0.$$

Это соотношение оказывается алгебраическим всякий раз, когда отношение постоянных значений средних кривизн поверхности вдоль этих двух геодезических W рационально. *С. Д. Россинский*

1789. О некотором семействе трансцендентных поверхностей. Крыговский (Sur une certaine famille de surfaces transcendantes. Krygowski Z.), Bull. Soc. amis. sci. et lettres Poznán, 1953, **12**, 107—111 (франц.)

Автор показывает, что поверхность

$$\frac{z^2}{c^2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) e^{-\frac{k^2 x^{2n} y^{2n}}{a^{2n} b^{2n}}}, \qquad (1)$$

где k^2 — произвольная постоянная, $n = 1, 2, 3, 4\ldots$, имеет четыре конические точки ($x = \pm a$, $y = \pm b$; $z = 0$), как и поверхность

$$\frac{z^2}{c^2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \qquad (2)$$

исследованная Руше (Rouché, C. r. Acad. sci., 1877, 434—436).

Дифференциальное уравнение асимптотических линий

$$r^2 dx^2 + 2s\,dx\,dy + t dy^2 = 0$$

поверхности (1) имеет алгебраические коэффициенты. При $k^2 = 0$ оно определяет асимптотические линии на поверхности (2), преобразуется в дифференциальное уравнение Эйлера и интегрируется в алгебраических функциях. *К. Н. Тихоцкий*

1790. Две проблемы современной дифференциальной геометрии. Фиников С. П., Вестн. МГУ, сер. физ.-мат. и ест. н., 1953, **6**, № 4, 3—14

Статья обзорного характера. Ее целью является рассмотрение эволюции классических задач дифференциальной геометрии XIX века и, особенно, двух задач, в развитии которых большое участие приняли московские геометры.

Первая задача относится к теории сопряженных сетей и конгруэнций. Отмечается, что в 1946 г. Т. Л. Козьмина (Докл. АН СССР, 1947, 55, № 3, 187—189) обнаружила нетривиальное обобщение преобразований Лапласа, исходя из рассмотрения трижды сопряженных систем поверхностей. Независимо от Т. Л. Козьминой и почти одновременно китайский математик Чжэнь Шэн-шэнь (Chern Shiing-Chen) получил аналогичные результаты для многообразия «особого проективного типа Картана» (p измерений) в проективном пространстве P_n, числа измерений $n \geqslant 2p$, допускающего преобразования Лапласа так же, как и трижды сопряженные системы в P_3. Наконец, Р. В. Смирнов (Докл. АН СССР, 1950, 71, № 3, 437 — 439) нашел, что результаты Козьминой и Чжэнь Шэн-шэня взаимно дополняют друг друга.

К тому же кругу идей примыкают неопубликованные результаты В. Т. Базылева (1952), доказавшего существование в пространстве P_n ($n > 3$) p-мерных многообразий $\mathfrak{M}_p$ с размерностью соприкасающегося пространства $q < 2p$, допускающих преобразования, аналогичные преобразованиям Лапласа по каждому из p сопряженных направлений C_i ($i = 1, \ldots, p$), но не распадающихся на $\frac{p(p-1)}{2}$ семейств двумерных поверхностей.

Известно, что триортогональная система Бианки с одним семейством псевдосферических поверхно

стей является единственной ортогональной системой R. Бианки показал, что асимптотические преобразования всех псевдосферических поверхностей триортогональной системы могут образовать новую псевдосферическую триортогональную систему. Им же поставлена задача построить трижды сопряженную систему R. В. И. Коровин в неопубликованной работе (1951) распространил на трижды сопряженные системы в четырехмерном проективном пространстве P_4 теорию инвариантов Дарбу. Отмечаются результаты Т. А. Шульмана по изысканию трижды сопряженных систем R (Докл. АН СССР, 1952, 85, № 3, 501—504). С. П. Фиников указывает, что остается открытым вопрос, допускают ли асимптотические преобразования другие трижды сопряженные системы в P_3 и можно ли распространить их на p-сопряженные системы в проективном пространстве P_n.

Вторая задача касается современного развития теории «расслояемых пар» в направлении изучения присоединенной к расслояемой паре системы конгруенций W. Упоминаются исходные по этим вопросам работы автора (1927), Кука (Cook, 1930), Пантази (Pantazi, 1932, 1934) и московских геометров С. С. Бюшгенса (1929), С. Д. Россинского (1927) и С. В. Бахвалова (1936). Отмечаются обнаруженные автором (1941), при исследовании расслояемых пар кривых, системы W второго рода, отличные от систем W, присоединенных к расслояемым парам прямолинейных конгруенций. Дается обзор результатов, полученных автором по теории расслояемых пар линейчатых поверхностей (Изв. АН СССР, 1945, 9, № 2, 79—119) и системам W (Мат. сб., 1951, 29 (71), № 2, 349—370; Докл. АН СССР, 1951, 79, № 2, 197—199).

В заключение отмечается построение Н. В. Лактановой в неопубликованной работе (1952) системы W с трехпараметрическим семейством конгруенций W и двумя двупараметрическими семействами фокальных поверхностей, которую можно рассматривать как непосредственное обобщение расслояемой пары конгруенций. *С. Д. Россинский*

1791. О последовательности Лапласа в пространстве прямых, присоединенной к поверхности. Легрен-Писсар (Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface. Legrain-Pissard), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 2, 112—121 (франц.)

В пятимерном проективном пространстве S_5 рассматривается последовательность Лапласа L:

$$\ldots U_3,U_2,U_1,U,V,V_1,V_2,V_3,\ldots,$$

присоединенная к изображению асимптотических касательных поверхности (x) трехмерного проективного пространства S_3.

1. Исследуются точки R пересечения прямой U_2V_2 с гиперквадрикой Q и прообразы этих точек R прямые r, которые образуют конгруенции (r) при изменении параметров u и v (u и v — асимптотические линии поверхности (x)).

2. Прямая UU_2 пересекает гиперквадрику Q в точках U и P, прямая VV_2 пересекает гиперквадрику Q в точках V и T. Образы точек P и T прямые p и t пересекаются в точке s. Рассматриваются точки s и конгруенции (xs), образованные прямыми, соединяющими точки x поверхности (x) с соответствующими им точками s.

3. Исследуются точки E пересечения прямой U_2U_3 с гиперквадрикой Q и поверхности (E), образованные точками E при изменении параметров u и v.

Общие уравнения прилагаются к частному случаю, когда (x) есть поверхность с совпадающими прямыми канонического пучка, а именно, к поверхностям Клейна—Ли (см. реф. 1792). *Н. В. Лактанова*

1792. О периодической последовательности Лапласа. Картон (Sur les suites de Laplace périodiques. Carton Maurice), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 2, 101—111 (франц.)

В пятимерном проективном пространстве S_5 рассматривается периодическая последовательность Лапласа L:

$$\ldots U_3,U_2,U_1,U,V,V_1,V_2,V_3,\ldots,$$

присоединенная к изображению асимптотических касательных поверхности (x) трехмерного проективного пространства S_3.

Главным образом исследуется бесконечная в обе стороны последовательность Лапласа с периодом, равным 8. В этом случае поверхности (U_3) и (V_3) принадлежат гиперквадрике Q и представляют асимптотические касательные некоторой поверхности (t). Сечения гиперквадрики Q плоскостями $V_1V_2V_3$ и $U_1U_2U_3$ являются образами семейств прямолинейных образующих квадрики Φ_1, причем квадрика Φ_1 совпадает с квадрикой Ли, отнесенной к точке t поверхности (t). Поверхности (x) и (t) в соответствующих точках x и t имеют один и тот же четырехсторонник Демулена. Точки пересечения квадрики Q с прямой U_2V_2 являются образами директрис Вильчинского, отнесенных к точке t поверхности (t).

Исследуется форма поверхности (x) Клейна—Ли

$$x^i = \exp(m_i u + n_i v), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$(m_i - h)^2 - m_i - k = 0$, $n_i = (m_i)^2 - h$ (k,h—постоянные),

когда присоединенная к ней последовательность Лапласа имеет период 6, 8 или 10.

Н. В. Лактанова

1793. Некоторые теоремы о двусторонне расслояемых парах с действительными фокальными поверхностями. Березина Л. Я., Мат. сб., 1953, 33 (75), № 1, 101—110

Статья посвящена истолкованию ряда отмеченных автором конечных соотношений, возникающих между геометрическими элементами двусторонне расслояемой пары прямолинейных конгруенций. В качестве примера приводим одну из теорем, сформулированных автором.

Теорема 3. Для любой из конгруенций, образующих двусторонне расслояемую пару, произведение тангенсов углов, которые образуют фокальные плоскости этой конгруенции с общим перпендикуляром, относится к произведению расстояний фокусов второй конгруенции до точки приложения общего перпендикуляра так же, как квадрат синуса угла соответствующих лучей относится к квадрату длины общего перпендикуляра.

Особо рассматривается случай специальных симметричных пар. Для них не все перечисляемые теоремы имеют место. Даем одну из трех теорем, отмечаемых автором.

Теорема 12. Для обеих конгруенций, образующих специальную симметричную пару, произве-

дение расстояния между граничными точками и синусов углов, которые образуют фокальные плоскости с общим перпендикуляром, равно одной и той же величине.

Содержатся ссылки на статьи С. П. Фиников (Мат. сб., 1943, **12** (54), 287—314) и автора (Изв. АН Латв. ССР, 1951, 8 (49), 1317—1325; 1952, 12 (65), 145—152). *С. Д. Россинский*

1794 Д. Семейства линий с заданным расположением бинормалей. Рыбаков В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1953

1795 Д. Расслояемая пара поверхностей. Лактанова Н. В. Автореф. дисс. канд. физ-мат. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1953

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

1796. О субпроективных аффинных связностях. Схоутен (On subprojective affine connections. Schouten J. A.), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 1, 72—79; Indagationes math., 1953, **15**, № 1, 72—79 (англ.)

Доказывается теорема: если (не проективно-евклидова) аффинная связность в n-мерном пространстве в специальной координатной системе имеет вид

$$\Gamma^h_{ji} = w_j \delta^h_i + w_i \delta^h_j + w_{ji} v^h \quad (w_{ji} = w_{ij})$$

и если векторное поле, имеющее компоненты v^h в этой координатной системе, является торсообразующим, то связность Γ^h_{ji} субпроективная.

Векторное поле v^h в пространстве аффинной связности называется торсообразующим, если имеет место соотношение

$$\nabla_j v^h = \alpha \delta^h_j + \beta_j v^h,$$

которое означает геометрически, что после развертывания любой кривой с параллельно переносимым вдоль нее вектором на аффинное пространство, прямая, направленная по этому вектору, описывает торс (развертывающуюся поверхность).

Приведенная теорема была ранее доказана Адати, но с излишними предположениями и более сложно (Adati T., On subprojective spaces, V, Tensor N. S. 1, 1951, 116—129). *П. К. Рашевский*

1797. О парах телепараллелизма. Сен (On pairs of teleparallelisms. Sen R. N.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 1, 21—32 (англ.)

Задание в римановом пространстве поля ортогонального n-эдра $\overset{p}{h}{}^i$ (p — номер вектора) позволяет, как известно, ввести интегрируемое параллельное перенесение (телепараллелизм), если потребовать, чтобы координаты вектора относительно n-эдра сохранялись постоянными; это дает условие

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_p \overset{p}{h}{}^i \frac{\partial \overset{p}{h}{}_j}{\partial x^k}.$$

Автор нашел выражения для пары таких триэдров в трехмерном римановом пространстве с метрическим тензором определенной структуры, содержащим три произвольные аналитические функции. Найденные формулы представляют обобщение результата Уиттекера (Whittaker E. T., J. London Math. Soc., 1930, **5**, 68—80), установившего интегрируемость параллелизмов Клиффорда для некоторого типа римановых пространств, содержащего и пространства постоянной кривизны. Подсчитав соответствующие коэффициенты связности $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$, автор ищет произвольные функции, последовательно подчиняя перенесение некоторым требованиям, связанным с рассмотренными им циклами параллельных перенесений:

1) $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} + 2g^{im}\left(\overset{1}{\Gamma}_{j[mk]} + \overset{1}{\Gamma}_{k[mj]}\right)$, триэдры различны.

2) Выполняются требования 1) и $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{1}{\Gamma}{}^i_{kj}$.

3) Триэдры совпадают.

Пространства типа 3) принадлежат к классу нулевой кривизны. Параллелизм евклидов. Пространства типа 2) содержат пространства постоянной ненулевой кривизны, для которых получаются клиффордовы параллелизмы. Пространства 1) образуют более широкий класс и им соответствуют параллелизмы, обобщающие перенос Клиффорда. *Б. Л. Лаптев*

1798. Задача Коши для идеальной термодинамической жидкости. Пхам-Ман-Куан (Le problème de Cauchy pour un fluide parfait thermodynamique. Pham-Man-Quan), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 1, 22—24 (франц.)

В V_4 общей теории относительности рассматривается область, заполненная идеальной термодинамической жидкостью, т. е., кроме гравитационного поля, единичного вектора скорости, собственной плотности и давления, вводится еще поле собственных температур. Исследуется задача Коши для основных уравнений, предложенных автором в предшествующей заметке (C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 24, 2299—2301). Устанавливается возможность вычисления на начальной гиперповерхности всех введенных величин и их последовательных производных по заданному гравитационному и температурному полям: $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$, θ, $\partial_\lambda \theta$. Указаны условия на границе с внешним гравитационным полем.

В формулах встречаются опечатки. *Б. Л. Лаптев*

1799 Д. Квази-лапласовы преобразования p-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства. Базылев В. Т. Автореф. дисс. канд. физ-мат. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1953

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1800. Потоки гороциклов на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Парасюк О. С., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 3 (55), 125—126

Всякий направленный линейный элемент e плоскости Лобачевского определяет единственный гороцикл, ортогонально пересекающий e и имеющий ту же бесконечно удаленную точку, что и опреде-

ляемая элементом e геодезическая. Поток возникает при перемещении всякого элемента вдоль соответствующего гороцикла на расстояние t. Остающаяся неопределенность устраняется дополнением элемента e до ортогонального биэдра и отождествлением второго направления биэдра с направлением перемещения. Поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны получается из потока на плоскости Лобачевского отождествлением линейных элементов, конгруентных относительно некоторой дискретной группы неевклидовых движений, изоморфной фундаментальной группе поверхности. Инвариантная мера определяется также, как для геодезических потоков.

Перенесением методов и рассуждений, примененных И. М. Гельфандом и С. В. Фоминым к исследованию геодезических потоков (Гельфанд И. М., Фомин С. В., Усп. мат. наук, 1952, **7**, № 1(47), 118—137), доказано, что поток гороциклов на любой поверхности постоянной отрицательной кривизны имеет лебеговский спектр и, следовательно, обладает эргодичностью и полным перемешиванием.

А. М. Васильев

1801. Движения с двумя степенями свободы в эллиптическом пространстве. I. Мюллер (Flächenläufige Bewegungsvorgänge im elliptischen Raum I. Müller Hans Robert), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 1, 29—43 (нем.)

Рассматривается двупараметрическое семейство положений «подвижного» эллиптического пространства в «неподвижном». Перпендикуляры к направлениям смещения точек пространства при мгновенном сдвиге образуют, как и в евклидовом пространстве, линейный комплекс. Неподвижные прямые такого сдвига будут двумя осями линейного комплекса. Многообразия ∞^1 мгновенных сдвигов, дающих переход из некоторого положения подвижного пространства к бесконечно близким положениям, принадлежащим нашему семейству, определяют пучок линейных комплексов. В общем случае оси этих комплексов образуют линейчатую поверхность четвертого порядка и пересекают ортогонально две взаимно полярные прямые — «полярные оси». Совокупность полярных осей образует конгруенции в подвижном и неподвижном пространствах.

Возьмем любую замкнутую линейчатую поверхность одной из этих конгруенций в неподвижном пространстве и соответствующую ей поверхность в подвижном пространстве. Обведем точку вокруг каждой из этих поверхностей ортогонально образующим. Сдвиги точек будут при этом равны. Обратно, две конгруенции с соответствием такого рода определяют двупараметрическое семейство движений с точностью до двух произвольных постоянных.

Точки подвижного пространства описывают в неподвижном поверхности. Нормали к ним в точках, соответствующих определенному положению подвижного пространства, образуют «линейную конгруенцию Шенеманна».

Полярные оси не определены, если каждая прямая подвижного пространства описывает в неподвижном конгруенцию, распадающуюся на ∞^1 левых цилиндров (параллелизм в смысле Клиффорда). В этом случае конгруенции Шенеманна имеют левопараллельные направляющие и распадаются на ∞^1 квадрик Клиффорда. Эти утверждения остаются справедливыми при замене слова «левый» на «правый».

В работе используются метод внешних форм Картана, исчисление кватернионов и отображение прямых эллиптического пространства на пары точек, лежащих на двух сферах (Штуди).

А. М. Васильев

1802. О некоторых метрических экстензорах. Крейг, Таунсенд (On certain metric extensors. Craig Homer V., Townsend B. B.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 25—46 (англ.)

Теория экстензоров — тензоров продолженной группы дифференцируемых преобразований, начало которой положено Крейгом в 1937 г., рассматривается в настоящей работе в тесной связи с геометрическими понятиями, относящимися к риманову пространству R_N, погруженному в евклидово пространство E_M. Вектор $\rho=\rho(x^1, \ldots, x^N)$ есть радиус-вектор, соединяющий начало координат пространства E_M с текущей точкой R_N. Изучаются приращение $\Delta\rho$ и различные производные ρ. Наряду с экстензорами, связанными с кривыми, рассмотрены и экстензоры, связанные с двумерными протяжениями, но в отличие от Кавагути (Kawaguchi A., Monatsh. Math. und Phys., 1939, **48**, 329—339) применяются матричные индексы, в которых форма основных экстензорных соотношений сохраняется. Построены три типа фундаментальных экстензоров, названных метрическими, так как они содержат среди своих компонент метрический тензор и символы Христофеля с двумя свободными индексами:

1. Экстензор прямой связности $g^b_{\alpha a}$, полученный скалярным умножением $d^M\rho / dt^M$, продифференцированного по $a^\alpha x^a / dt^\alpha$, на ρ^b.

2. Экстензор альтернированной связности $L^b_{\alpha a}$, получающийся при чередовании дифференцирований ρ и проектирований на ρ^b.

3. Экстензор замен (interchange extensor) $\mathfrak{G}_{\alpha a\beta b}$, позволяющий перебрасывать эксковариантные и экконтравариантные индексы.

Особое внимание уделено экстензорам, получаемым дифференцированием данного тензора по параметру с умножением на надлежащие коэффициенты (прежнее обозначение $E:::$). Найдены выражения для компонент таких экстензоров, построенных для эквиполлентных тензоров, через компоненты самого тензора, через L и производные последних. Подсчитаны результаты различных контрактированных связностей L и g, выявлено их геометрическое значение и установлена связь между экстензором $\mathfrak{G}_{\alpha a\beta b}$ и L.

В заключение рассмотрен вопрос о плоскостности R_N. Высшие внутренние производные, вычисленные при помощи связностей g и L, будут совпадать только в том случае, если R_N — плоскость в E_M («полностью плоско»).

Рассматривая двумерные протяжения в R_N и пользуясь матричными индексами, авторы вычисляют разность двух внутренних производных 2-го порядка — прямой смешанной и с чередованиями по u и v, и приходят к известному тензору D^d_{abc}, антисимметрическая часть которого дает тензор кривизны.

Б. Л. Лаптев

1803. К инвариантной теории контактных преобразований. Дейвис (On the invariant theory of contact transformations. Davies Evan T.), Math. Z., 1953, **57**, № 4, 415—427 (англ.)

Рассматривается риманово пространство V_N ($N=2n$), снабженное аффинной связностью $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, N$), сохраняющей метрику. При этом, вообще говоря, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Пространство V_N снабжается (в каждой точке) неголономным аффинным репером, причем плоскость первых n его векторов ортогональна к плоскости последних n векторов. Эти две плоскости предполагаются фиксированными. Неголономный репер специализируется так, что его первые n векторов получаются проектированием первых n векторов естественного репера на первую плоскость, а последние n векторов — проектированием последних n векторов естественного репера на вторую плоскость (под естественным репером мы понимаем аффинный репер, сопутствующий системе криволинейных координат x^{α} в V_N). Тогда преобразования неголономного репера происходят лишь вследствие преобразований координат x^{α}.

Далее построение специализируется так, что допускаются лишь контактные преобразования координат x^{α}, в соответствии с чем x^{α}($\alpha=1, 2, \ldots, 2n$) обозначаются x^i, p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$); при этом неголономный репер выбирается так, чтобы билинейный ковариант

$$dx^i \delta p_i - dp_i \delta x^i$$

(инвариантный при контактных преобразованиях) сохранял в нем свою запись (если понимать под dx^i, dp_i координаты бесконечно малого вектора относительно неголономного репера). Всякий тензор Λ^{α} или Π_{α} в V_N при проектировании на две плоскости неголономного репера распадается на два «контактных тензора»: λ^i, λ_i — в случае Λ^{α} (контравариантные индексы, отвечающие координатам p_i и соответственно второй плоскости неголономного репера, пишутся внизу; $i = 1, 2, \ldots, n$) или соответственно π_i, π^i — в случае Π_{α} (аналогичная инверсия происходит и с обозначениями ковариантных индексов; $i = 1, 2, \ldots, n$). При этом между λ^i и π^i нет принципиального различия, т. е. закон преобразования контактного тензора λ^i, контравариантного на первой плоскости неголономного репера, таков же, как и тензора π^i, ковариантного на второй плоскости. Это же справедливо и для λ_j и π_i.

Изучается, заданная в V_n связность $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в применении к контактным тензорам, в частности, строятся аналоги тензора кривизны.

Как показывает автор, его работа обобщает работу Дойла (Doyle T. C., Ann. Math., 1941, **42**, 678—721), а также его собственную работу (Proc. London Math. Soc., 1947, **49**, 241—259). *П. К. Рашевский*

1804. О группах голономии линейных связностей. 1A.1B. Общие свойства аффинных связностей. Нейенхёйс (On the holonomy groups of linear connections. 1A, 1B. General properties of affine connections. Nijenhuis Albert), Koninkl. Nederl. Acad. wetensch. Proc., 1953, **A56**, № 3, 233—240, 241—249; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 233—240, 241—249 (англ.)

Рассматривается (в целом) связное n-мерное многообразие M класса C^k, $k \geqslant 3$, снабженное аффинной связностью $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ класса C^{k-2}. Как известно, параллельное обнесение векторов по всевозможным замкнутым путям, начинающимся и кончающимся в какой-либо точке p, порождает в касательном аффинном пространстве $E_n(p)$ в точке p группу центроаффинных преобразований $h(M, p)$, так называемую группу голономии.

Автор занимается детальным исследованием ограниченной группы голономии $h^0(M, p)$, преобразования которой отвечают путям, допускающим непрерывное стягивание в точку; $h^0(M, p)$ есть группа Ли, не зависящая (с точностью до изоморфизма) от выбора точки p. Показывается как построить алгебру Ли группы $h^0(M, p)$ (мы получаем бесконечно малое преобразование группы $h^0(M, p)$, если путь обхода идет из p в произвольную точку q, затем делает бесконечно малую петлю и возвращается из q в p прежней дорогой).

Локальной группой голономии $h^*(p)$ называется пересечение всех $h^0(U, p)$, где U — всевозможные связные открытые множества, заключающие p ($h^0(U, p)$ определяется так же, как и $h^0(M, p)$, но с заменой M на U). $h^*(p)$ — также группа Ли. Если размерность $h^*(p)$ постоянна на M, то $h^*(p) = h^0(M, p)$, вообще же $h^*(p) \subseteq h^0(M, p)$.

Далее предполагается, что M — класса C^{∞} (бесконечно дифференцируемое). В каждом $E_n(p)$ вводится центроаффинная группа $h'(p)$, которая определяется тем, что ее алгебра Ли натягивается на матрицы

$$R^{\ldots\ \beta}_{\mu\lambda,\ \alpha\ldots},\ \nabla_{\nu} R^{\ldots\ \beta}_{\mu\lambda,\ \alpha\ldots},\ \ldots,\ \nabla_{\nu_k}\ldots\nabla_{\nu_1} R^{\ldots\ \beta}_{\mu\lambda,\ \alpha\ldots},\ \ldots,$$

вычисленные в точке p (матричные индексы — α, β; R — обозначение тензора кривизны). Оказывается, что $h'(p) \subseteq h^*(p)$. Если $h'(p) = h^*(p)$ для всех $p \in M$, то $h^0(M, p) = h^*(p) = h'(p)$. В частности, это всегда происходит в аналитическом случае. В неаналитическом же случае M содержит замкнутое множество Ω^* без внутренних точек такое, что в каждой связной компоненте M_i дополнения $M - \Omega^*$ имеет место $h^0(M_i, p) = h^*(p)$ для всякой точки $p \in M_i$, причем M_i нельзя расширить с сохранением этого свойства. Каждое M_i подразделяется множеством Ω', тоже замкнутым и без внутренних точек, на связные открытые множества M_{ij} такие, что размерность $h'(p)$ постоянна на M_{ij} и в каждой точке $p \in M_{ij}$ имеем $h'(p) = h^*(p) = h^0(M_i, p)$, в то время как для $q \in \Omega'$ $h'(q) \subset h^*(q)$ в строгом смысле. *П. К. Рашевский*

1805. Об определении геометрических объектов. I, II. Хантьес, Ламан (On the definition of geometric objects. I, II. Haantjes J., Laman G.), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A 56**, № 3, 208—222; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 208—222 (англ.)

В ч. I статьи дается применение теории косых произведений, (Стинрод Н., Топология косых про-

изведений, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 274) к теории геометрических объектов. В качестве обобщения известного понятия тензорного пучка над дифференцируемым многообразием дается определение пучка геометрических объектов класса s и типа $h(x)$ над дифференцируемым многообразием X_n^r, где $h(x)$ для каждого $x \in X_n^r$ — гомоморфизм дифференциальной группы L_n^s порядка s на данную группу преобразований G, являющуюся группой пучка. Геометрический объект определяется как точка пучка геометрических объектов, а поле геометрического объекта — его секущая поверхность. Пучок геометрических объектов называется транзитивным, если группа преобразований G транзитивна, и называется пучком геометрических объектов постоянного типа, если $h(x)$ не зависит от x. Далее вводится понятие эквивалентности пучков геометрических объектов и показывается, что каждый класс эквивалентных транзитивных пучков геометрических объектов класса $\leqslant s$ и постоянного типа h определяется заданием замкнутой подгруппы K дифференциальной группы L_n^s, причем сопряженные подгруппы определяют один и тот же класс эквивалентных транзитивных пучков геометрических объектов.

В ч. II статьи находятся все замкнутые подгруппы размерности n^2-1 полной линейной группы L_n, что дает возможность определить все классы эквивалентных транзитивных пучков геометрических объектов постоянного типа, первого класса, размерности 1. Оказывается, что существует бесконечное число этих классов. Известная до сих пор классификация одномерных геометрических объектов первого класса (Пензов Ю. Е., Докл. АН СССР, 1946, **54**, № 7, 567—570) является неполной потому, что она была основана на нахождении только всех связных замкнутых подгрупп размерности n^2-1 полной линейной группы L_n.

В. В. Вагнер

ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ. ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1806. Бесконечно малые изгибания желобов. Позняк Э. Г., Мат. сб., 1953, **32 (74)**, № 3, 681—692

Автор называет многоугольным желобом поверхность X, полученную последовательным склеиванием регулярных цилиндрических поверхностей X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; каждая поверхность X_i ограничена двумя прямолинейными образующими и двумя кривыми L_{1i} и L_{2i}; X_i и X_{i+1} склеиваются по кривым L_{2i} и L_{1i+1} (X_i и X_n склеиваются по L_{11} и L_{2n}); прямолинейные образующие всех X_i параллельны одной плоскости π. Поверхность X может иметь самопересечение; линии самопересечения автор не причисляет к особенностям этой поверхности.

Бесконечно малое изгибание многоугольного желоба (и вообще ребристой поверхности) автор называет обусловленным, если в каждой точке любого ребра угол между касательными плоскостями к склеенным поверхностям является стационарным. Поверхность называется обусловленно жесткой, если среди обусловленных бесконечно малых изгибаний она допускает только тривиальные; в противном случае поверхность называется обусловленно нежесткой.

Доказана теорема: необходимое и достаточное условие обусловленной нежесткости многоугольного желоба заключается в том, чтобы все многоугольники, полученные сечениями желоба плоскостями, параллельными плоскости π, были подобны и имели площадь, равную нулю (площадь многоугольника берется с учетом знака по обычному правилу).

Для треугольного желоба доказывается жесткость в обычном смысле. Поскольку желоб может быть сколь угодно узким, то тем самым впервые показано, что явление жесткости может иметь место для поверхностей, определенных лишь «частично в целом», без предположения аналитичности как самой поверхности, так и поля скоростей, допустимых деформацией. Результаты статьи были опубликованы в Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 2, 205—207.

Н. В. Ефимов

1807. Об одном необходимом признаке плотнейшего расположения фигур. Залгаллер В. А., Усп. мат. наук, 1953, **8**, № 4(56), 153—163

Рассматриваются задачи следующего типа: данную фигуру или группу фигур разместить в прямоугольнике наименьшей площади; данную фигуру, многократно повторяемую, поместить на параллельной полосе (бесконечной или конечной) так, чтобы площадь ленты, приходящаяся на каждый экземпляр, была наименьшей; разместить конгруентные фигуры параллельными рядами на плоскости так, чтобы площадь заготовки, приходящаяся на каждую фигуру, была наименьшей. Подобные задачи возникают при раскрое материала и при штамповке.

Площадь S, о которой идет речь, является функцией параметров, определяющих положение данных фигур. Автор исходит из условия локальной экстремальности $dS \geqslant 0$. Поэтому полученные им условия являются только необходимыми. Данные фигуры рассматриваются как твердые пластинки, соприкасающиеся без трения. Подбирается система внешних сил, действующих на эти пластинки так, что при каждом допустимом бесконечно малом перемещении пластинок $dP = -dS$, где dP — работа этих сил, а dS — изменение упомянутой площади. Условие $dS \geqslant 0$ заменяется равносильным условием $dP \leqslant 0$. Согласно принципу возможных перемещений, неположительность dP при всех возможных бесконечно малых перемещениях системы необходима и достаточна для равновесия этой системы.

Рассматривается ряд примеров, в каждом из которых строится надлежащим образом система сил, и из изложенного выше механического принципа извлекаются геометрические условия экстремальности площади. Пусть, например, данную фигуру требуется заключить в прямоугольник наименьшей площади. Предположим, что фигура имеет по одной общей точке с каждой стороной прямоугольника. За силы можно принять силы давления на пластинку сторон прямоугольника, численно равные длинам этих сторон. Окончательное условие следующее: диагональ прямоугольника, образованного нормалями к сторонам объемлющего прямоугольника в точках касания с пластинкой, должна быть перпендикулярна диагонали объемлющего прямоугольника. Если это условие не выполнено, то момент упомянутых сил показывает, в каком направлении следует повернуть фигуру

на небольшой угол, чтобы заведомо удалось сократить площадь объемлющего прямоугольника, сохраняя направления его сторон. *Н. М. Бескин*

1808. Исследование целочисленного инварианта N бинарных форм степени $n>4$. Макарова З. Т., Мат. сб., 1953, **33**(75), № 1, 233—240

В статье исследуется целочисленный инвариант $N(F)$ бинарной формы $F(x, y)$, введенный в рассмотрение Н. В. Ефимовым в связи с теорией изгибания поверхностей (см., например, Мат. сб., 1946, **19** (**61**), № 3, 461—488). Доказана теорема: для любого $n>4$ почти все формы степени n имеют инвариант $N=\infty$; исключение составляют формы, коэффициенты которых связаны хотя бы одним соотношением из некоторого счетного множества рациональных соотношений. Тому же вопросу посвящена статья В. А. Тартаковского (РЖМат, 1953, 428). *Н. В. Ефимов*

1809. Характеристический признак локально-выпуклых кривых. Кюннет (Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven. Künneth Hermann), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1—2, 158—164 (нем.)

Под кривой (дугой) понимается непрерывный образ окружности (отрезка) в евклидовой плоскости E. Простая дуга — взаимно однозначный, непрерывный образ отрезка. В случае неоднозначной обратимости различают место и точку образа; места находятся с точками оригинала во взаимно однозначном соответствии. Места кривой (дуги) циклически (линейно) упорядочены, если оригинал определенным образом ориентирован. Под окрестностью места P кривой (дуги) понимается образ окрестности $U(x)$ точки x-оригинала P. Упорядоченность позволяет различать две полуокрестности; если они совпадают, то соответствующее место P называют острием. Если $V(P)$ — окрестность точки P в E, а C — кривая или дуга, то связная, содержащая P компонента $V(P)\cap C$ называется окрестностью точки P на C. Покрытая несколько раз простая дуга называется псевдокривой.

Кривая или дуга C называется выпуклой, если она имеет с любой прямой не более двух общих точек. Кривая или дуга называется локально (соответственно, точечно) выпуклой в месте (соответственно, в точке) P, если у места (соответственно, точки) P существует на C выпуклая окрестность. Кривая или дуга локально (точечно) выпуклая в каждом месте (в каждой точке) называется локально (точечно) выпуклой.

Прямая g называется локальной опорной прямой в месте P, если существует окрестность P, лежащая по одну сторону g (кроме самой точки P, лежащей на прямой g). Если в любой окрестности места P имеются точки C, лежащие по разные стороны от g, то g — локально-пересекающая прямая. Аналогично определяются точечно-опорные и точечно-пересекающие прямые.

Через $J(S)$ обозначается индекс точки S плоскости E, не лежащей на C, по отношению к C, равный числу опорных полупрямых C, проходящих через S. $\Psi(S)$ обозначает характеристику S по отношению к C, равную углу поворота луча SP, где P — место C, когда P пробегает C.

Устанавливаются следующие (допускающие обращение) теоремы: 1. Если кривая C, не являющаяся псевдокривой, имеет с некоторой прямой три общие точки или две общие точки, в одной из которых эта прямая является опорной, то кривая C не является точечно-выпуклой. 2. Если C — локально-выпуклая кривая, то для каждой не лежащей на C точки плоскости S число $J(S)+\frac{|\Psi(S)|}{\pi}$ конечно и постоянно (и равно классу кривой). *В. В. Рыжков*

См. также: 1518, 1519, 1523, 1527 **РЕЦ**, 1616, 1650, 1657, 1701 **РЕЦ** 1932, 1934; РЖМех, 1953, 265

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1810. О применимости метода С. А. Чаплыгина к приближенному интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Чечик В. А., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 4, 741—744

Автор решает поставленную Н. Н. Лузиным (Усп. мат. наук, 1951, **6**, № 6, 27) задачу о развитии метода С. А. Чаплыгина для приближенного решения уравнения

$$q=f(x, y, z, p) \qquad (1)$$

$$(p=\partial z/\partial x,\ q=\partial z/\partial y)$$

с начальным условием Коши

$$z(x, y_0)=\varphi(x). \qquad (2)$$

Исследование проводится при помощи теоремы о дифференциальных неравенствах, обобщающей аналогичный результат Е. Ф. Саваренского для линейных уравнений с частными производными.

Пусть $z(x, y)$ — решение уравнения (1), а $v(x, y)$ — решение уравнения

$$q=f(x, y, z, p)+g(x, y), \qquad (3)$$

удовлетворяющие условию (2). Пусть D — область в полуплоскости $y\geqslant y_0$ плоскости xOy, образованная проекциями характеристических кривых уравнения (3), проходящих через точки $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $y=y_0$, $z=\varphi(x)$. Пусть в области D функция $z(x, y)$ однозначна и выполнены условия: а) $f''_{p^2}\leqslant 0$, б) $g(x, y)>0$. Тогда во всех точках области $z(x, y)\leqslant v(x, y)$, причем знак равенства достигается только при $y=y_0$.

Указывается, что эта теорема обобщается на случай уравнений с n независимыми переменными, если условие а) заменить требованием отрицательной определенности некоторой квадратичной формы.

Опишем алгоритм автора построения последова-

тельных приближений. Пусть $v_n(x, y)$ — функция, удовлетворяющая условию (2) и такая, что

$$\frac{\partial v_n}{\partial y} - f\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right) \geqslant 0, \qquad (4)$$

причем знак равенства достигается лишь при $y = y_0$. Тогда в качестве следующего приближения берется функция $v_{n+1}(x, y) = v_n(x, y) - \sigma_n(x, y)$, где $\sigma_n(x, y)$ — решение линейного уравнения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - f'_v\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\cdot\sigma - f'_p\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y} - f\left(x, y, v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}\right),$$

удовлетворяющее условию $\sigma_n(x, y_0) \equiv 0$. Функция $v_{n+1}(x, y)$ также удовлетворяет условию (4).

Доказывается, что $v_{n+1}(x, y)$ ближе к искомому решению, чем $v_n(x, y)$, если форма $f''_{v^2}\xi^2 + 2f''_{vp}\xi\eta + f''_{p^2}\eta^2$ отрицательно определена при $y \geqslant y_0$.

Утверждается, что для случая конечной области D быстрота сходимости характеризуется неравенством

$$\max_D |v_n(x, y) - z(x, y)| < C/2^{2^n},$$

если только $v_0(x, y)$ и $\partial v_0(x, y)/\partial x$ взяты достаточно близкими к $z(x, y)$, $\partial z(x, y)/\partial x$.

М. А. Красносельский

1811. О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина. Азбелев Н. В., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 4, 589—591

Автор обобщает теорему С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Для нелинейных дифференциальных уравнений вводится понятие промежутков применимости различных порядков теоремы С. А. Чаплыгина для данного решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ относительно некоторой области G определения правой части $f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ и данных начальных разностей. Длина промежутка применимости p-го порядка не возрастает при увеличении p. Для линейного уравнения величины промежутков применимости зависят лишь от интервала (x_0, X) независимого переменного x.

Кроме того, для неоднородного линейного уравнения промежуток применимости p-го порядка определяется ближайшим к начальной точке нулем производной p-го порядка того решения соответствующего однородного уравнения, начальные значения которого совпадают с данными начальными разностями. Для оценки длин промежутков применимости в нелинейном случае сформулирована теорема сравнения, утверждающая, что промежуток применимости p-го порядка для любого решения линейного уравнения

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} q_k(x) v^{(k)}$$

относительно интервала (x_0, X) изменения аргумента и данных начальных разностей содержится в промежутке применимости p-го порядка для решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ относительно области G и тех же начальных разностей, если только в области выполнены неравенства

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \geqslant q_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, p,$$

где частные производные и функции $q_k(x)$ предполагаются непрерывными. *М. Р. Шура-Бура*

1812. О критерии устойчивости для уравнения с частными разностями. Крандалл (On a stability criterion for partial difference equations. Crandall Stephen H.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 80—81 (англ.)

Используя понятие устойчивости линейных уравнений в частных разностях с постоянными коэффициентами, введенное Нейманом, О'Брайен, Хайман и Каплан (O'Brien G. G., Hyman M. A., Kaplan S., J. Math. and Phys., 1951, **29**, № 4, 229) сформулировали критерий устойчивости для нелинейных разностных уравнений и линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Дается пример, опровергающий этот обобщенный критерий устойчивости. *Ш. Е. Микеладзе*

1813. Оценка погрешности в методе Релея—Ритца. Кёлер (Estimates for the errors in the Rayleigh—Ritz method. Koehler Fulton), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 1, 153—164 (англ.)

Изучается задача о собственных значениях и собственных функциях однородного дифференциального уравнения $Ly = \lambda y$ с однородными линейными граничными условиями (C). Граничные условия не содержат параметра λ. Область R в задаче имеет любое число измерений. Предполагается, что задача положительно определенная и самосопряженная. Обозначим собственные значения через $\{\lambda_i\}$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, и соответствующие им собственные функции через $\{y_i\}$, $(y_i, y_j) = \delta_{ij}$. Для $Ly = 0$ и условий (C) предполагается существование функции Грина $G(P, Q)$, симметричной по P и Q, а также равномерная ограниченность $\int G^2(P, Q)\, dQ$. Собственные функции характеризуются следующим свойством: $\lambda_k = \min (\varphi, L\varphi)/(\varphi, \varphi)$, $(\varphi, y_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, где φ принадлежит классу допустимых функций, т. е. удовлетворяет условиям (C) и имеет непрерывные производные до наивысшего порядка, входящего в L.

В методе Релея—Ритца берется последовательность $\{\psi_i\}$ независимых допустимых функций и множество V_n, образованное линейными комбинациями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Минимизация $(\varphi, L\varphi)/(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in V_n$, приводит к уравнению n-го порядка относительно λ: $|b_{ij} - \lambda a_{ij}| = 0$, $a_{ij} = (\psi_i, \psi_j)$, $b_{ij} = (\psi_i, L\psi_j)$, обладающему n корнями $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$; соответствующие им функции обозначим $f_k(P; n)$. В реферируемой работе дается оценка $\mu_k - \lambda_k$. Для этого рассматривается задача минимизации $(L\varphi, L\varphi)/(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in V_n$. Эта задача приводится к уравнению n-го порядка относительно λ: $|c_{ij} - \lambda a_{ij}| = 0$, $c_{ij} = (L\psi_i, L\psi_j)$. Корни этого

уравнения обозначим $\nu_k = \nu_k^2(n)$, $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$. Для каждого из них имеется соответствующая функция $g_k(P; n) \in V_k$ такая, что $(g_i, g_j) = \delta_{ij}$ и $(Lg_k, Lg_k) = \nu_k^2$, $\mu_k \leqslant \nu_k$.

Доказывается, что $\lambda_k^{-2} - \varepsilon \leqslant \nu_k^{-2} \leqslant \mu_k^{-2} \leqslant \lambda_k^{-2}$, где $\varepsilon = \varepsilon(n) = \left[\iint (K - A_n)^2\, dP\, dQ\right]^{1/2}$, $K(P, Q) = \int G(P, X)\, G(X, Q)\, dX$,

$$A_n = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, w_i(P),\ w_j(Q),$$

$$a_{ij} = \iint K(P, Q)\ w_i(P)\, w_j(Q)\ dP\ dQ$$

и $\{w_i\}$ — полная ортонормальная совокупность функций. При этом нужно предположить дополнительно, что $K(P, Q)$ соответствует вполне непрерывному оператору в гильбертовом пространстве и что $\iint K(P, Q)\, \varphi(P)\, \varphi(Q)\, dP\, dQ > 0$ для любой непрерывной функции φ, не равной тождественно нулю. При тех же предположениях доказывается, что при достаточно больших n $|g_k - y_k|$ меньше, чем некоторая постоянная, зависящая только от k, помноженная на $\varepsilon^{1/2}(n)$. При условии ограниченности функции Грина $|G(P, Q)| < B$ доказывается, что $|f_k - y_k| = O(\varepsilon^{1/2})$ равномерно по области R. *Н. П. Жидков*

1814. Решение плоской задачи теории упругости для бесконечной полосы методом конечных разностей. Литвинов (Розв'язання плоскої задачі теорії пружності для безконечної смуги методом конечних різниць. Литвинов М. В.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 2, 117—121 (укр.; резюме русск.)

Методом сеток граничная задача для бигармонического уравнения в бесконечной полосе сводится к системе линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка. Для отыскания чисел влияния, т. е. элементов обратной матрицы, автор рассматривает имеющуюся бесконечную систему линейных уравнений как линейную систему конечного порядка, неизвестные которой суть бесконечные в обе стороны последовательности значений искомой функции в рядах узлов, параллельных границе полосы, а коэффициенты — бесконечные в обе стороны постоянные обобщенные матрицы Якоби.

К полученной системе конечного порядка автор применяет обычный метод обращения матрицы при помощи алгоритма Гаусса; так как коэффициентами системы, к которой применяется этот алгоритм, являются матрицы, то в процессе исключения и обратной подстановки необходимо проводить операции над матрицами. Из условия постоянства элементов рассматриваемых матриц следует, что алгебраические операции над такими матрицами сводятся к соответствующим операциям над одним из столбцов. Необходимое по ходу дела обращение матриц автор предлагает проводить вычислением нескольких членов степенного ряда

$$b \sum_{0}^{\infty} (E - \tilde{A}b)^n,$$

где $\tilde{A}$ — обращаемая матрица, а в качестве b выбирается скалярная матрица, диагональные элементы которой обратны элементам главной диагонали матрицы $\tilde{A}$. Заменяя каждую клетку исходной матрицы суммой всех элементов какого-либо столбца этой клетки, автор получает числовую матрицу, для которой каждый элемент обратной матрицы равен сумме всех элементов какого-либо столбца клетки, являющейся соответствующим элементом матрицы, обратной для исходной клеточной матрицы. Таким образом, обращение одной числовой матрицы дает возможность определить суммы элементов в клетках обратной матрицы. Знание этих сумм автор предлагает использовать для контроля проведенного обращения исходной матрицы и определения достигнутой точности. *М. Р. Шура-Бура*

1815. Приспособление метода Греффе к автоматическим вычислениям. Ческино (Sur une adaption de la méthode de Graeffe au calcul automatique. Ceschino Francis), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 20, 1945—1947 (франц.)

В целях автоматизации вычисления корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \ldots \geqslant |x_n|$) алгебраического уравнения $f(x) = 0$ в случае, когда уравнение имеет несколько корней, модули которых почти равны, предлагается следующее дополнение к методу Лобачевского (автор называет его методом Греффе).

Вместо $f(x)$ преобразованиям подвергают многочлен $f(x - t)$, причем параметр t считают весьма малой величиной, степенями которой пренебрегают. Если $|x_{p+1}| \approx |x_{p+2}| \approx \ldots \approx |x_{p+q}|$, то при некотором m в m-ом преобразованном многочлене

$$f_m(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n} (a_i + tb_i)\, x^{n-i}$$

коэффициенты a_p и a_{p+q} будут примерно квадратами соответствующих коэффициентов многочлена $f_{m-1}(x)$. Деля $a_{p+i} + tb_{p+i}$ на $a_p + tb_p$, пренебрегая малыми величинами и приравнивая коэффициенты при t^0 и t^1, получают наряду с системой

$$\frac{a_{p+i}}{a_p} = \sum x^s_{p+\alpha_1} \cdots x^s_{p+\alpha_i} \quad (1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_i \leqslant q)$$

также и систему

$$\frac{b_{p+i}}{a_p} - \frac{a_{p+i}\, b_p}{a_p^2} = s \sum_{\beta} x^{s-1}_{p+\beta} \sum x^s_{p+\alpha_1} \cdots x^s_{p+\alpha_i - 1}, \quad \beta \neq \alpha_i$$

здесь $i = 1, 2, \ldots, q$; $s = 2^m$.

Первая система, как известно, приводит к уравнению $a_p X^q - a_{p+1} X^{q-1} + \ldots = 0$, корни $X_{p+i} = x^s_{p+i}$ которого имеют равные модули. Вторая система позволяет, в частности и при $q = 1$, по X_{p+i}

восстановить x_{p+i}, не пользуясь извлечением корня второй степени (система является линейной относительно x_{p+i}^{-1}). *В. М. Курочкин*

1816. Метод дифференцирования эмпирических функций. Кауфман, Шинброт (A method for differentiation of experimental data. Kauffman William M., Shinbrot Marvin), J. Aeronaut. Sci, 1953, **20**, № 6, 428—430 (англ.)

Описывается вычислительно-графический метод дифференцирования: составляются значения $\varphi(-2)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, где

$$\varphi(\lambda)=\frac{F(x_0+\lambda\Delta x)-F(x_0)}{\lambda\Delta x},$$

и путем графической интерполяции находится

$$\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=F'(x_0).$$

М. Л. Бродский

1817. Об одном методе аппроксимации. Пайу (Une méthode d' approximation. Pailloux Henri), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 11, 1133—1134 (франц.)

Приближенное решение задачи о минимуме интеграла часто строится в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k,$$

где φ_k — координатные функции и a_k — искомые коэффициенты. Автор рекомендует брать по возможности малое n, затем ввести в построенное приближенное решение один или несколько параметров и снова произвести расчет. Как вводить эти новые параметры, автор не указывает, но утверждает, что этот прием дает хорошие результаты в теории балок.

Для облегчения подбора координатных функций автор предлагает подчинять их не точным, а приближенным краевым условиям. Так, если краевые условия имеют вид $f_i=0$, то рекомендуется заменять их условиями вида $F_h(f_i)=0$, $h=1, 2, \ldots, \nu$, где F_h — некоторые функционалы, а ν — произвольно выбранное число. Необходимо указать, что аналогичный прием был использован Л. С. Лейбензоном еще в 1933 г. и затем разработан им под названием «метод смягчения граничных условий» (Лейбензон Л. С., Собр.трудов, 1, Изд-во АН СССР, 1951, 206). *С. Г. Михлин*

1818. Замечание к оценке ошибки при интерполяционном процессе Адамса. Тольмин (Bemerkung zur Fehlerabschätzung beim Adamsschen Interpolationsverfahren. Tollmien W.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 4, 151—155 (нем.)

Пусть уравнение $dy/dx=f(x, y)$ численно решается методом Адамса с применением формулы

$$\tilde{y}_{n+1}=\tilde{y}_n+h\left\{F_{n+1}-\frac{1}{2}\Delta F_n-\frac{1}{12}\Delta^2F_{n-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{24}\Delta^3F_{n-2}\right\},$$

$\tilde{y}_n$ — приближенное значение для $y(x_n)$, $x_n=x_0+nh$, $F_n=f(x_n, \tilde{y}_n)$. Мысль автора — удобным способом продолжить $\tilde{y}$ на весь интервал (x_n, x_{n+1}) и оценить $d\tilde{y}(x)/dx-f(x, \tilde{y})$, тогда известным образом оценивается $y-\tilde{y}$. На интервале (x_{n-2}, x_{n+1}) автор представляет $\tilde{y}(x)$ таким многочленом седьмой степени $P_7(x)$, что $P_7(x_i)=\tilde{y}_i$ и $P_7'(x_i)=F_i$, $i=n-2$, $n-1$, n, $n+1$. Тогда при $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$ получается

$$\left|\frac{d\tilde{y}(x)}{dx}-f(x, \tilde{y}(x))\right|\leqslant\frac{h^2}{24}\,|F^{(IV)}(\xi)-P_7^{(V)}(\xi)|,$$

ξ — промежуточная в (x_{n-2}, x_{n+1}) точка. Практическое развитие указанного метода оценки автор оставляет до другого случая. В соотношениях (2), (4), в 9 строке снизу, стр. 152, имеются очевидные опечатки: в (2) вместо $\frac{d\tilde{y}}{dx}=f(x, y)+\theta(x)$ нужно $\frac{d\tilde{y}}{dx}=f(x, \tilde{y})+\theta(x)$; в (4) вместо $|\ldots|=M|y_I-y_{II}|$ нужно $|\ldots|\leqslant M|y_I-y_{II}|$; в 9 строке снизу, стр. 152 вместо $F(x)$ нужно $\tilde{F}(x)$. Соотношение (5) неправильно. *А. А. Абрамов*

1819. Некоторые приложения конечных разностей. Крили (Some applications of finite differences. Creely Joseph W.), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 189—197 (англ.)

Рассматривается интерполяционная формула Ньютона с равноотстоящими узлами и при помощи ее выводятся приближенные формулы для нахождения точек с заданной производной и точек перегиба. Выводятся квадратурные формулы и формулы для приближенного вычисления длины дуги в прямоугольной и полярной системах координат. Для приведенных формул подсчитаны коэффициенты.

В заключение дается элементарное рассмотрение влияния погрешностей табличных значений функций на погрешности разностей функции.

Примечание референта. В статье имеются источности. На стр. 191—192 неправильно выводятся остаточные члены R' и R'' для первой и второй производной (см. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1953, 265—267). *Е. А. Волков*

1820. Несколько заметок о вычислении. Принг (Some notes on computing. Pring R. W.), Empire Survey Rev., 1953, **12**, № 88, 57—64 (англ.)

Указывая на то, что наиболее распространенной ошибкой при вычислениях является употребление неправильного числа цифр в приближенных значениях величин, автор рассматривает несколько элементарных примеров и приходит к заключению, что число цифр (но не десятичных знаков) произведения и частного должно быть таким же, как в наименее точном из данных.

Эти соображения автора правильно указывают на недостаток обычных вычислений и путь его исправления, но для советского читателя они не новы. Основная идея рассуждений автора была четко сформулирована А. Н. Крыловым еще в 1911 г. (Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычисле-

ниях, Гостехиздат, М.—Л., 1950, 15). На основе этого «принципа Крылова» были разработаны правила округления результатов действий над приближенными числами («правила подсчета цифр»), имеющиеся во многих советских математических справочниках и в сборнике математических таблиц, широко применяемом в советских школах. Применение этих правил полностью устраняет тот недостаток вычислений, о котором говорится в статье.

Автор указывает, что в распоряжении топографов, пользующихся счетными машинами, мало хороших печатных вычислительных схем, и предлагает несколько примерных схем, фактически выполняя некоторые более сложные вычисления для разных случаев вычисления координат точек земной поверхности. Рассмотрено вычисление прямоугольных координат точки для меркаторской проекции по данным географическим ее координатам, вычисление длины и азимута отрезка по формулам Кларка, вычисление прямоугольных координат точки P по данным координатам точек A и B и данным углам ABP и BAP, вычисление координат точки P по данным координатам точек A, B, C и данным углам APB и BPC, вычисление координат точек P и Q по данным координатам недоступных точек A и B и углам APB, APQ, AQB, AQP. *В. М. Брадис*

1821. Несколько заметок о вычислении. Принг (Some notes on computing. Pring R. W.), Empire Survey Rev., 1953, **12**, № 89, 115—121 (англ.)

Отмечается первостепенная важность контроля. Указывается, что простая проверка самим вычислителем каждой написанной им цифры — худший метод контроля. Если проверку нельзя поручить другому лицу, то надо практиковать повторное вычисление другим способом или применять какую-нибудь контрольную формулу.

Если вычисляются значения функции для равноотстоящих значений аргумента, то почти всегда целесообразен контроль через составление таблицы разностей первого и последующих порядков, доведенной до разностей, среднее значение которых есть нуль. Разностями II, III, IV,... порядка со средним значением нуль можно пренебрегать, если они не превосходят соответственно 2, 4, 8, ..., так как их можно полностью отнести к округлению значений функции.

В большинстве геодезических вычислений применяется интерполяция со вторыми и высшими разностями, причем наиболее удобной является интерполяционная формула Бесселя. При ее применении разности III и IV порядка надо принимать во внимание лишь в редких случаях. При разыскании значения аргумента по данному значению функции, т. е. при решении задачи обратной интерполяции, рекомендуется применение итерации.

Приводятся два довода за постоянное округление (при отбрасывании конечной пятерки) к ближайшей четной цифре: только это «правило четной цифры» дает правильный результат в случае, когда округленное значение приходится делить на 2, а также почти во всех случаях, когда последовательно выполняются два округления, состоящие в отбрасывании одной последней цифры.

Рассматривается ряд вопросов, возникающих при составлении таблицы значений: о выборе шага таблицы, о необходимом и достаточном количестве вычисляемых десятичных знаков, о выгоде субтабулирования, в частности посредством последовательного интерполирования на середину с использованием формулы $f_{0,5} = \frac{1}{16}(-f_{-1} + 9f_0 + 9f_1 - f_2)$ [здесь $f_n = f(a + nh)$, $f_{0,5} = f(a + 0{,}5h)$].

Приводятся конкретные примеры табулирования функций. В заключительном разделе («Критические таблицы») показана выгодность замены таблицы функции с постоянным шагом аргумента таблицей той же функции при постоянной табличной разности, равной единице разряда последней цифры: получаются существенное упрощение интерполяции и гарантия, что ошибка от интерполяции никогда не превзойдет половины единицы последнего разряда. *В. М. Брадис*

1822. Работа со счетной линейкой. Часть IV (Working with a slide rule. Part IV), Engr Apprentice, 1953, **2**, № 19, 346—349 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 455.

1823. Графическое решение интегральных уравнений Вольтерра. Штыкан А. Б., Тр. Иркутского гос. ун-та, 1953, **8**, № 1, 28—35

Дается графический способ построения решения интегрального уравнения Вольтерра, основанный на использовании известного процесса последовательных приближений. С практической точки зрения способ имеет значение, если конечный промежуток, для которого строится график, подразделить на частичные промежутки так, чтобы в каждом из них искомый график можно было бы приближенно считать прямой линией. *Ш. Е. Микеладзе*

1824. Номограмма для расчета круглых и прямоугольных воздуховодов. Фильней М. И., Тр. Новосибирского инж.-строит. ин-та, 1953, **3**, 87—92

Приводятся две номограммы для расчета круглых и прямоугольных воздуховодов. Первая номограмма, являющаяся основной, предназначена для гладких труб круглого и прямоугольного сечения. Вторая номограмма служит для определения поправочного коэффициента перехода от гладких труб к шероховатым. Принцип построения номограмм не указан; первая номограмма, повидимому, построена приближенным путем, так как расчетные зависимости не принадлежат к номографируемому виду. В основу номограммы для гладких труб положена формула для удельного падения давления:

$$R = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} \gamma,$$

в которой автор для практического диапазона изменения числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 3000—5\,000\,000$) полагает

$$\lambda = \frac{0{,}87}{(\lg \mathrm{Re})^{2{,}4}}.$$

Для шероховатых труб принята формула

$$\lambda_{ш} = 0{,}111 \left(\frac{k}{d}\right)^{0{,}25},$$

где $\lambda_{ш}$ — коэффициент трения шероховатых труб, d — диаметр в *мм*, k — абсолютная шероховатость в *мм*.

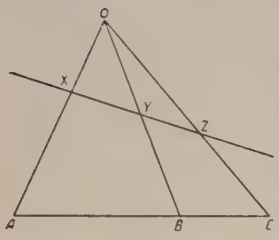
Номограммы построены для случая нормального воздуха при 20° и барометрическом давлении 760 *мм* рт. ст. *Г. С. Хованский*

1825. Номограммы суммы трех обратных величин. Грегг (Reciprocal nomograms. Gregg C. V.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 320, 90—95 (англ.)

Доказывается (см. фиг.), что с учетом знаков

$$\frac{\sin BOC}{OX}+\frac{\sin COA}{OY}+\frac{\sin AOB}{OZ}=0, \qquad (1)$$

$$BC\,\frac{XA}{OX}+CA\,\frac{YB}{OY}+AB\,\frac{ZC}{OZ}=0. \qquad (2)$$



Когда точка C находится в бесконечности, (2) приводится к виду

$$\frac{XA}{OX}-\frac{YB}{OY}+\frac{AB}{OZ}=0.$$

Когда точка O находится в бесконечности, получаем номограмму с параллельными шкалами. Зависимость (2) в этом случае имеет вид

$$BC\cdot AX+CA\cdot BY+AB\cdot CZ=0.$$

Рассмотрены способы графического построения номограммы зависимости $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$ для случаев, когда шкалы x, y, z равномерные и когда одна из шкал равномерная, а две другие проективные. В заключение указывается на возможность построения номограммы этой зависимости на коническом сечении и касательной к нему. *Г. С. Хованский*

1826 К. Приемы счета. Берман Г. Н., изд. 5-е, 88 стр., Гостехиздат, М., 1953, 1 р. 25 к.

Книга содержит ряд сведений о простейших приемах устного и письменного счета с целыми и дробными числами, существенно дополняя то, что имеется по этому вопросу в школьных учебниках арифметики. Эти сведения изложены в форме практических правил. Применение их показано на многочисленных примерах.

Почти половину книги занимает глава «Приближенные вычисления», в которой изложены важнейшие правила обращения с приближенными числами. *В. М. Брадис*

1827 РЕЦ. Численное решение дифференциальных уравнений. Коллац (Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Collatz L., pp. 13 + 458, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 48 DM) [**Рецензия: Милн** (Milne W. E.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 1, 94—96 (англ.)]

1828 РЕЦ. Вычисления в линейной алгебре. Дуайр (Linear computations. Dwyer Paul S., pp. XI + 344, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1951, 6.50 doll.) [**Рецензии: Фрейм** (Frame J. Sutherland), J. Chem. Education, 1953, **30**, № 3, 163—164, **Голдстайн** (Goldstine Herman H.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 1, 56 (англ.)]

1829 РЕЦ. Линейные вычисления. Дуайр (Linear Computations. Dwyer P. S., pp. 344, New York, Wiley, 1951) [**Рецензия: Курочкин В.**, Новые книги за рубежом, 1953, **2**, 48—50]

1830 РЕЦ. Практическое руководство для вычислений. Палмер, Стаут (Practical calculus. Palmer Claude Irwin, Stout Claude E., 2-nd ed., pp. XX + 470, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952, 6.00 doll.) [**Рецензия: Ханна** (Hanna J. Ray), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 4, 335—336 (англ.)]

1831 РЕЦ. Практическая математика. Палмер, Бибб (Practical mathematics. Palmer Claude Irwin, Bibb Samuel Fletcher, pp. XII + 769, McGraw-Hill Book Co., Inc., N. Y., 1952, 4.50 doll.) [**Рецензия: Хокинс** (Hawkins George E.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 6, 507 (англ.)]

1832 РЕЦ. От таблицы умножения до интеграла. Кольрю (De la table de multiplication à l'intégrale. Colerus Egmont, pp. 320, 55 figs, Flammarion, éditeur, 1952, 1000 fr.) [**Рецензия:** (M. B.), Atomes, 1953, **8**, № 89, 286 (франц.)]

1833 РЕЦ. Прикладная номография. Ч. II. Кислер (Angewandte Nomographie. Teil II. Kiessler Fritz, S. 176, 151 Zeichnungen, Diagrammen und Tabellen, Essen, Verlag W. Girardet, 1952, 19.80 DM) [**Рецензия: Шторк** (Stork Karl), Ind.-Anzeiger, 1953, **75**, № 41, 504 (нем.)]

1834 РЕЦ. Номография и эмпирические уравнения. Джонсон (Nomography and empirical equations. Johnson L. H., pp. 150, 92 ill., Wiley, New York, Chapman and Hall, London, 1951) [**Рецензия: Вундерлих** (Wunderlich W.) Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 51 (нем.)]

ТАБЛИЦЫ

1835. Корни уравнения $J_{-(l+1/2)}(\lambda\eta)J_{l+1/2}(\lambda)-J_{l+1/2}(\lambda\eta)J_{-(l+1/2)}(\lambda)=0$. **Чандрасекхар, Элберт** (The roots of $J_{-(l+1/2)}(\lambda\eta)\times J_{l+1/2}(\lambda)-J_{l+1/2}(\lambda\eta)J_{-(l+1/2)}(\lambda)=0$. Chandrasekhar S., Elbert Donna), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 3, 446—448 (англ.)

Обозначения: l — натуральное число, η — правильная дробь,

$$S_{l+\frac{1}{2}}(\lambda, x)=J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\lambda\eta)J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda x)-$$
$$-J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda\eta)J_{-\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\lambda x),$$

λ_j — j-й положительный корень уравнения

$$S_{l+\frac{1}{2}}(\lambda, 1)=0,$$

$$N_{j,\,l+\frac{1}{2}} = \int_{\eta}^{1} xS^2_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_j, x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{(\lambda_j^2\pi^2)}\left\{\frac{J^2_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_j\eta)}{J^2_{l+\frac{1}{2}}(\lambda_j)} - 1\right\}.$$

Работа содержит таблицы величин λ_1, $J_{\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\lambda_1)$, $J_{\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)}(\lambda_1\eta)$, $N_{1,\,l+\frac{1}{2}}$ для следующих значений параметров η и l:

$\eta = 0{,}2$ $l = 1, \ldots, 5$; $\eta = 0{,}5$ $l = 1, \ldots, 15$;
$\eta = 0{,}3$ $l = 1, \ldots, 6$; $\eta = 0{,}6$ $l = 1, \ldots, 15$;
$\eta = 0{,}4$ $l = 1, \ldots, 7$; $\eta = 0{,}8$ $l = 1, \ldots, 15$.

Точность таблиц в большей их части — 6 значащих цифр. *М. К. Гавурин*

1836. Приспособление, облегчающее работу по подсчету площади зеркального и листового стекла (New plate and sheet glass calculator increases efficiency in computing footage), Glass Digest, 1953, **32**, № 4, 47 (англ.)

Описывается таблица, дающая площадь прямоугольника в кв. футах по его основанию и высоте в дюймах, т. е. значения функции $z = xy : 144$ по данным значениям аргументов x и y. *В. М. Брадис*

1837 РЕЦ. Таблица функций Бесселя первого рода от 79 до 135 порядков (Tables of the Bessel functions of the first kind of orders seventy-nine through one hundred and thirty-five, pp. X + 614, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1951, 52 s.) [**Рецензия: Бикли** (Bickley W. G.), Nature, 1953, **171**, № 4362, 993 (англ.)]

Краткая рецензия на последний том из двенадцати, составляющих фундаментальную таблицу значений с десятью десятичными знаками бесселевых функций первого рода до 135-го порядка для аргументов, не превосходящих ста. *К. А. Семендяев*

См. также: 1518, 1554, 1611, 1614, 1659, 1661, 1669, 1735

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1838. Композиция программ. Хоппер (Compiling routines. Hopper Grace M.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 4, 1—5 (англ.)

Число отдельных различных команд, которые могут быть даны современной счетной машине, не велико. Вместо установки дополнительных устройств в машину для производства некоторых операций, оказалось удобнее составлять соответствующие программы. Поэтому очень важно придумать способы для сокращения времени программирования. Одним из наилучших способов такого сокращения является составление подпрограмм для производства некоторых операций и хранение их в библиотеке для использования в общей программе данной задачи. Использование подпрограмм можно осуществлять двумя методами — операционным и композиционным.

Операционный метод заключается в следующем: подпрограмма находится в фиксированном положении в памяти; псевдокоманда главной программы направляет управление машины к подпрограмме, подпрограмма выполняется и управление снова возвращается к главной программе. Этот метод и примеры его приложения можно найти в книге Уилкс, Уиллер, Гилл «Составление программ для электронных счетных машин» (Изд-во иностр. литры, М., 1953).

Метод композиции состоит в переносе (копировании) подпрограмм в общую программу и расстановке адресов в соответствии с используемыми данными, получаемыми результатами и положением подпрограммы в основной программе. Эта работа может производиться самой машиной. Способ композиции дает возможность иногда исключить часть команд, используемых для отсылки к памяти. Он может быть использован с широким классом подпрограмм, включая и итеративные. При этом оказывается возможным при помощи машины составлять некоторые новые подпрограммы, которых нет в библиотеке. Указывается на возможность использования метода для коммерческих вычислений. Изложение носит весьма общий характер; примеры отсутствуют. *Н. П. Жидков*

1839. Электронная вычислительная машина фирмы «Булль». Дрейфус (Le calculateur électronique Bull. Dreyfus P.), Ingrs et techniciens, 1953, № 54, 43, 45, 47 (франц.)

Дается краткое описание электронной вычислительной машины, выпускаемой серийно французской фирмой Булль. В машине принята система изображения десятичных чисел последовательными импульсами; каждая цифра изображается ее двоичным кодом. При частоте импульсов 280 *кгц* на передачу 12-значного числа требуется 0,17 *мсек*. Числа в машине хранятся в ячейках памяти, представляющих собой электромагнитные линии задержки. Для восстановления формы импульсов после прохождения через линии задержки и другие цепи применяются ламповые вентильные устройства, позволяющие заменять искаженный импульс стандартным от генератора. Различные модели вычислительной машины имеют от 4 до 15 ячеек памяти.

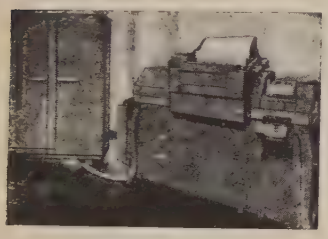
Для сложения и вычитания числа направляются в сумматор. На его выходе получается при помощи соответствующей схемы сумма или разность чисел, поданных на два входа. Умножение и деление получаются путем повторных сложений и вычитаний и сдвигов.

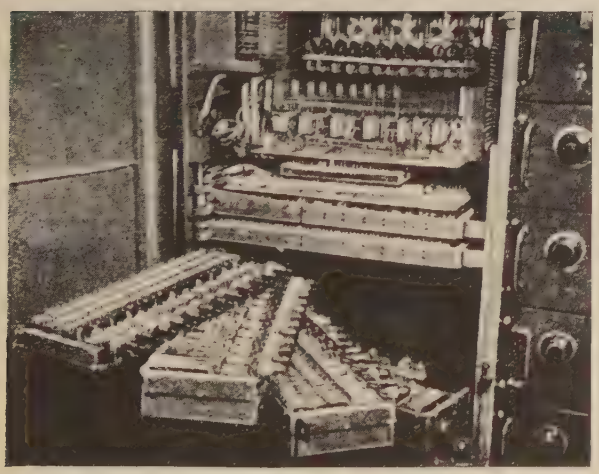
Для цепей управления используются германиевые диоды. Общее количество ламп в машине достигает 450. Процесс вычисления задается программой, составленной из одноадресных команд, указывающих вид операции и адрес одного из чисел, участвующих в данной операции. Второе число всегда берется из рабочей ячейки памяти, хранящей предыдущий результат. Всего имеется 14 видов операций, в том числе арифметические действия, сравнения, сдвиги и т. д. Программа воспринимается с коммутационной доски (64 команды) и с перфокарт. Автор предполагает в следующей статье дать описание построения программ.

Машина может быть связана с репродуктором и табулятором. Счетчики последнего могут при этом служить дополнительными ячейками памяти. По утверждению автора, разработанная система профилактической проверки элементов позволяет устанавливать их старение и обеспечивает возможность полезно использовать 98% рабочего времени машины. *К. С. Семендяев*

1840. Заметки об электронных вычислениях. Девo (Répercussions intellectuelles du calcul électronique. Devaux Pierre), La nature, 1953, **5**, № 3217, 142—146 (франц.)

После кратких общих соображений о том, что вновь созданные большие автоматические электронные вычислительные машины заставляют людей, пользующихся ими, перестроить свой образ мышления, дается краткий очерк истории вычислительных машин, начиная с Паскаля и кончая электронными машинами. Для последних в самых общих чертах даны некоторые сведения: указана роль памяти и программирования, описана разница между последовательным и параллельным способами передачи чисел, пояснена двоичная система счисления и т. п. Более конкретные данные приведены относительно электронной вычислительной машины фирмы «Булль» (см. реф. 1839). На фотографиях дан общий вид этой машины, соединенной с табулятором, и часть внутреннего вида машины (выдвинуты отдельные ячейки памяти). *К. А. Семендяев*





1841. Национальное бюро стандартов США разрабатывает вычислительную машину из стандартных блоков (NBS designs «Building Block» computer), Prod. Engng, 1953, **24**, № 3, 205 (англ.)

С целью упрощения производства, уменьшения стоимости и облегчения эксплуатации электронных цифровых машин Национальное Бюро стандартов США (НБС) разрабатывает два типа стандартных блоков, из которых можно строить многие узлы больших вычислительных машин.

Блок первого типа состоит из усилительной лампы, импульсного трансформатора и ряда германиевых диодов, бо́льшая часть которых предназначена для входных цепей. Предусмотрено 4 разновидности таких блоков, отличающихся количеством диодов. Наибольшее количество диодов в блоках первого типа принято равным 38 (некоторые из них включаются параллельно).

Блок второго типа состоит из ряда линий задержки и предназначен в основном для коммутационных целей. Оба типа блоков спроектированы в расчете на долговременную службу, массовое производство, простоту испытания и обслуживание даже малоквалифицированным персоналом.

Блоки обоих типов смонтированы на солидных 60-штырьковых основаниях. Большое количество штырьков позволяет совершенно разъединить многие элементы внутри блоков. Благодаря этому достигается гибкость внешних связей и значительно облегчается обнаруживание места неисправности внутри блоков.

Проектируемая НБС вычислительная машина будет состоять из 800 стандартных блоков, вставленных в 10 шасси, по 80 штук в каждом. Шасси будут установлены по 4 штуки на стойках размером 2,2 *м* × 1 *м*.

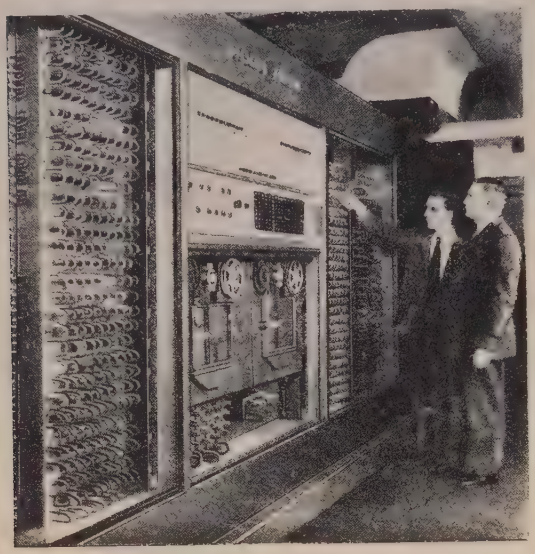
Проверка блоков предполагается при помощи осциллографа, который подключается к специальным контрольным гнездам, связанным с выходными цепями блоков. Для обнаружения места неисправности внутри блока предусмотрено специальное контрольное устройство, в которое вставляется испытываемый блок. Поворотом селекторного переключателя последовательно подключаются для проверки все элементы блока. Все блоки периодически проверяются в соответствии с графиком профилактического ремонта. Если элементы блока изменили свои параметры больше, чем это допускается нормами, то блок изымается и заменяется запасным. *Е. А. Волков*

1842. Новая электронная вычислительная машина ОАРАК, обладающая одним из самых больших запоминающих устройств (OARAC, new electronic computer, has one of largest memories yet used), Electrical Engng, 1953, sec. 1, **72**, № 3, 273—274 (англ.)

Краткое описание цифровой вычислительной машины ОАРАК (OARAC — Office of Air Research Automatic Computer). Эта машина была заказана фирме «Дженерал Электрик» Военно-воздушными силами США и предназначается для исследователь-

ского центра Военно-воздушных сил в Дайтоне (штат Огайо).

ОАРАК — одноадресная машина последовательного типа; вычисления ведутся с десятичными числами, представляемыми двоично-десятичным кодом.



Запоминающее устройство построено на магнитном барабане диаметром около 560 *мм* и длиной 760 *мм*. Барабан вращается со скоростью 3400 об/мин. Числа и команды запоминаются на дорожках, расположенных группами, по четыре дорожки в каждой группе. Всего имеется 50 таких групп. Каждая группа четырех дорожек дает возможность запомнить 200 десятизначных чисел с их знаками или же столько же команд. Общее количество запоминающих ячеек на барабане составляет 10 000. Арифметическое устройство состоит из последовательно-параллельного сумматора (десятичные цифры двух слагаемых поступают в сумматор последовательно, а сложение каждой пары десятичных цифр производится параллельно) и трех оперативных регистров для производства арифметических и других операций над числами; скорость сложения 83 *мксек*. Рабочая частота арифметического устройства равна 150 *кгц*. Из-за большого времени ожидания данных (максимальное время выборки 17 *мсек*.) ОАРАК выполняет в среднем 110 одноадресных операций в 1 сек. Ввод и вывод данных осуществляется при помощи магнитных лент.

В ОАРАК предусмотрены следующие два вида контроля вычислений. Во-первых, так как в машине для представления чисел принят двоично-десятичный код, то при появлении 6 непредусмотренных 4-значных двоичных кодов цифр из 16 возможных, машина останавливается. Во-вторых, в программе решения задачи намечаются «контрольные пункты», которые разбивают программу на участки. Вычисления между «контрольными пунктами» производятся по возможности двумя различными способами и результаты сравниваются. Если результаты совпадают в пределах заданной точности, вычисления продолжаются дальше. Если же результаты не совпадают, вычисления на предыдущем участке программы повторяются. При третьем несовпадении результатов вычислений на одном участке программы машина останавливается и подает соответствующий сигнал.

В машине 1400 электронных ламп и 7000 германиевых диодов. Основная часть машины занимает стойку размером 5 *м* × 2,2 *м* × 0,8 *м* (см. фото).

Относительная простота конструкции ОАРАК, легкость ее обслуживания и надежность в работе достигнуты в основном за счет введения минимального необходимого количества выполняемых машиной операций и применения для постройки всех узлов машины, кроме магнитного барабана и вводных и выводных устройств, лишь семи типов стандартных взаимозаменяемых блоков. Для облегчения сборки и эксплуатации барабана считывающая и записывающая головки объединены в одну. Приведена фотография барабана. *Е. А. Волков*

1843. Большая вычислительная машина для нужд авиации. Класс (Big brain to solve aviation problems. Klass Philip), Aviat. Week, 1953, 58, № 6, 61—62, 65—66 (англ.)

Краткое описание новой вычислительной машины ОАРАК (см. реф. 1842). Приведена фотография части выводного устройства, в котором данные, записанные на магнитную ленту, перепечатываются на бумагу (см. фото).

Указывается, что ОАРАК является медленной машиной (110 операций в 1 сек.) по сравнению с такими, например, машинами, как РЕЙДАК фирмы «Райтеон», которая работает в 10—15 раз быстрее. Фирма «Дженерал Электрик», построившая ОАРАК, считает, что для решения математических задач чрезвычайно быстрые машины не являются наиболее подходящими, так как они часто не дают выигрыша в производительности по сравнению с машинами, имеющими среднюю скорость. Будучи более сложными и имея в своем составе в несколько раз больше электронных ламп и другого оборудования, они чаще выходят из строя и простаивают; кроме того, во многих случаях время ввода программы и исходных данных в машину больше, чем машинное время для решения самой задачи.

Указывается, что фирма «Дженерал Электрик» занялась постройкой машины ОАРАК потому, что собирается применить такого типа машины для управления станками, предназначенными для полностью автоматизированного изготовления электронных при-

боров. Эти машины разрабатываются на том же заводе «Дженерал Электрик» в Сиракузах, где изготовлялся и ОАРАК; в них, так же как и в ОАРАК, команды будут получаться в цифровой форме с магнитных лент. «Дженерал Электрик» видит широкие перспективы применения цифровых устройств для целей управления автоматическими заводами в области электронной, химической и других отраслей промышленности. *Е. А. Волков*

1844. Вычислительная машина ОАРАК решает задачи для военно-воздушных сил США (OARAC computer solves Air Force problems), Tele-Tech., 1953, **12**, № 3, 108 (англ.)

Приводятся краткие технические данные машины ОАРАК (см. реф. 1842, 1843). Помимо указанных ранее данных, сообщается, что в машине имеется 1000 съемных стандартных блочков. Потребляемая мощность составляет 20 *квт*. Без дополнительных входных и выходных устройств (см. реф. 1843) машина занимает площадь 10 *кв. м*. При указании времени сложения в тексте допущена опечатка — вместо 83 μсек указано 83 сек. *Н. Я. Матюхин*

1845. Большая вычислительная машина (Bigger brains), Iron Age, 1953, **171**, № 10, 198 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине ОАРАК (см. реф. 1842, 1843, 1844), которая будет использоваться военно-воздушными силами США для решения задач, связанных с проектированием самолетов, автопилотов, управляемых снарядов и т. п.
Н. Я. Матюхин

1846. Вычислительная машина ОАРАК («OARAC» computer), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 4, 20 (англ.)

Краткое сообщение об окончании постройки электронной вычислительной машины ОАРАК (см. реф. 1842—1845). *Н. Я. Матюхин*

1847. Электронная вычислительная машина воздушных сил США. Берри (USAF electronic computer. Berry M.), Amer. Helicopter, 1953, **29**, № 3, 13—14 (англ.)

Популярное изложение некоторых сведений об электронной вычислительной машине ОАРАК (OARAC) (см. реф. 1842). *Е. А. Волков*

1848. Новая вычислительная машина с большим объемом памяти (New brain with the big memory), Current Sci. and Aviat., 1953, **38**, № 25, 197 (англ.)

См. реф. 1842.

1849. Автоматическая вычислительная машина ИРА 1103. Макдоналд, Беркли (The ERA 1103 automatic computer. Macdonald Neil, Berkeley E. C.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 2, 23—24 (англ.)

Фирма «Ремингтон Ранд» сообщила о новой быстродействующей электронной дискретной вычислительной машине ИРА1103, которая должна быть закончена в 1953 г. (РЖМат, 1953, 933).

ИРА1103 предназначена для решения математических задач из различных областей науки и техники, а также для работы с реальными объектами. Помещение, занимаемое машиной, имеет размеры 18 *м* × × 6 *м*. ИРА1103 оперирует с 35-значными двоичными числами с фиксированной запятой, расположенной перед старшим разрядом. Для задания знаков чисел отведен 36-й разряд.

В машине имеется три вида запоминающих устройств.

Быстродействующее запоминающее устройство объемом в 1024 ячейки построено на электроннолучевых трубках (электростатическое запоминающее устройство). Время выборки данных от 6 до 10 μсек.

Промежуточное запоминающее устройство объемом в 16 384 ячейки построено на магнитном барабане. Барабан имеет диаметр 430 *мм* и вращается со скоростью ~1800 об/мин. На каждой дорожке барабана расположено 4096 намагничиваемых точек. Дорожки расположены четырьмя секциями, по 36 штук в каждой секции. Данные с барабана могут считываться группами для передачи в быстродействующее запоминающее устройство; барабан может работать также непосредственно с арифметическим устройством. Для сокращения времени ожидания в последнем случае ячейки, относящиеся к последовательным адресам, расположены на барабане не рядом, а на некоторых расстояниях. Передача данных с барабана в электростатическую память и обратно производится со скоростью 30 000 двоичных разрядов в 1 сек.

Медленное запоминающее устройство выполнено на магнитных лентах и имеет емкость 200 000 чисел. Скорость передачи данных с ленты в электростатическую память и обратно равна 27 000 двоичных разрядов в 1 сек.

Для ввода и вывода данных в ИРА 1103 имеется ряд автоматических считывающих и записывающих устройств, работающих с перфолентами, перфокартами и магнитными лентами.

Для связи с реальными объектами в машине имеются два регистра из триггерных ячеек: регистр А — на 6 двоичных разрядов и регистр Б — на 36 двоичных разрядов. Оба регистра могут служить и для восприятия данных от реальных объектов и для передачи данных в реальные объекты. Регистр Б может воспринимать данные каждые 24 μсек и затем передавать данные в электростатическую память с задержкой в 10 μсек.

Машина ИРА 1103 построена по двухадресной системе. Двухадресное сложение производится за 74 μсек, а двухадресное умножение за 126—406 μсек. Арифметическое устройство позволяет оперировать с удвоенным количеством разрядов. Всего имеется 45 различных команд. Эта группа команд выбрана на основании опыта работы на машине типа 1101. В ИРА1103 имеются такие специальные команды, как повторение предыдущей операции над следующими данными несколько раз, умножение матриц и др. Команды могут находиться как в электростатическом запоминающем устройстве, так и на магнитном барабане.

В ИРА1103 предусмотрен автоматический контроль работы при записи данных на магнитную ленту (каждое число записывается дважды и производится сравнение) и контроль при передаче команд. Для этой цели используется то обстоятельство, что при шестизначном двоичном коде для операций в машине используются только 45 кодов из 64 возможных; при случайном появлении любого из 19 неиспользуемых кодов машина останавливается.

Профилактическая проверка машины производится при уменьшенном накале ламп и увеличении рабочей частоты с 500 до 750 *кгц*.

Производились испытания машины ИРА1103

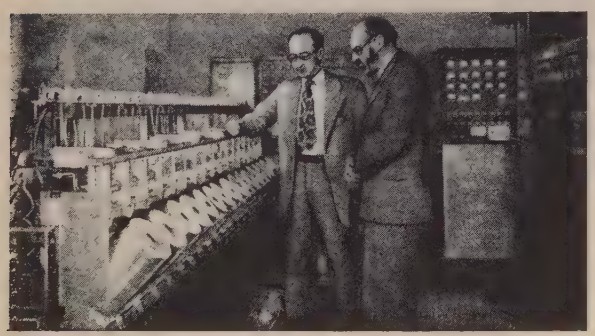
с неполной (с $^1/_6$ частью) электростатической памятью, которые дали положительные результаты.

Предшественница машины ИРА1103 машина типа ИРА1101 эксплуатировалась по 168 час. в неделю в течение 2 лет. Из них было 87,5% производительного времени, 10% времени предусмотренного ремонта и 2,5% времени непредусмотренного ремонта.

Е. А. Волков

1850. Цифровая счетная машина Аргонской национальной лаборатории в действии (Argonne digital computer now operating), Chem. and Engng News, 1953, **31**, № 10, 1008 (англ.)

Приведен общий вид машины АВИДАК (РЖМат, 1953, 932). Налево запоминающее устройство (см. фото). Цилиндры содержат электроннолучевые трубки, в которых запоминаются данные. Емкость запоминающего устройства — 1024 двенадцатизначных десятичных числа. Справа видна часть арифметического устройства.



1851. Быстродействующая цифровая электронная вычислительная машина (High-speed electronic digital computer), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 28 (англ.)

Электронная цифровая вычислительная машина ИРА1103 (ERA1103) строится по заказу правительства США, однако с 1954 г. поступает в продажу. Машина имеет быстродействующее электростатическое запоминающее устройство с временем выборки от 6 до 10 *мксек*; запоминающее устройство на магнитном барабане со скоростью выдачи 30 000 чисел в 1 сек. (число состоит из 36 двоичных разрядов); запоминающее устройство на магнитной ленте со скоростью выдачи около 750 чисел в 1 сек.

Машина складывает 16 700 десятиразрядных чисел в 1 сек., среднее время умножения 266 *мксек*. Оборудование для ввода и вывода данных состоит из фотоэлектрического устройства для считывания с перфоленты, быстродействующего перфоратора, телетайпа и магнитной ленты. Возможно также чтение с перфокарт. ИРА1103 содержит 4500 ламп. Вес всей машины 10 *т*, занимаемая площадь 6 *м* × 18 *м*.

Помимо выполнения вычислений, машина предназначена для автоматизации управления производственными процессами, диспетчерской службы на аэролиниях, для целей противовоздушной обороны и т. д.

Примечание референта. Приведенные здесь данные о скорости работы запоминающего устройства на магнитном барабане (30 000 чисел по 36 двоичных разрядов в 1 сек.) расходятся с данными статьи, прореферированной в предыдущем реферате (30 000 двоичных разрядов в 1 сек.).

Н. Я. Матюхин

1852. «Ремингтон Ранд» выпускает новую вычислительную машину (Remington Rand announces new computer), Tele-Tech, 1953, **12**, № 5, 125 (англ.)

См. реф. 1850, 1851; РЖМат, 1953, 933, 1440.

1853. Новая электронная вычислительная машина ИБМ (The new IBM electronic data processing machines), Scient. American, 1953, **188**, № 5, 62—63 (англ.)

Объявление фирмы «ИБМ» (IBM) о выпуске новой электронной вычислительной машины (см. фото). Эта машина известна так же как «тип 701» (Electrical Engng, 1953, **72**, № 5, 464—466).

В объявлении указывается, что машина выполняет 16 666 сложений или вычитаний в 1 сек. и 2192 умножений или делений в 1 сек. Указывается, что машина имеет запоминающие устройства трех типов: на электроннолучевых трубках, на магнитном барабане, на магнитной ленте.

1854. Новая вычислительная машина ИБМ-701 (IBM installs new computer), Tele-Tech, 1953, **12**, № 5, 126 (англ.)

Вычислительная машина ИБМ-701 состоит из 11 соединенных между собой блоков. Два магнитных барабана машины позволяют запоминать более 80 000 знаков; считывающие головки находятся на расстоянии 0,025 *мм* от поверхности барабана; барабаны вращаются со скоростью около 3000 об/мин.

В текущем году предполагается построить 12 машин ИБМ-701; арендная плата за пользование машиной составит около 12 000 долларов в месяц (см. реф. 1853).

Е. А. Волков

1855. Вычислительные машины в серийном производстве (Brains come off assembly line), Iron Age, 1953, **171**, № 14, 101 (англ.)

Сообщается о серийном выпуске корпорацией «Интернейшнал Бизнес Машинс» электронных вычислительных машин ИБМ-701 (IBM-701). В текущем году предполагается выпустить 12 вычислительных машин ИБМ-701.

Вычислительная машина ИБМ-701 по сравнению с первой моделью ИБМ обладает в 25 раз большей скоростью вычислений при незначительном увеличении ее размеров (см. реф. 1853, 1854).

Е. А. Волков

1856. Вычислительные машины для продажи (Computers for all), Scient. American, 1953, **188**, № 5, 55 (англ.)

Фирмы «ИБМ» и «Ремингтон Ранд» приступили к серийному производству электронных вычислительных машин. «ИБМ» выпускает в текущем году 12 электронных вычислительных машин (типа ИБМ-701), каждая из которых весит 10 *т*. В будущем предполагается увеличить выпуск этих машин до 15—20 в 1 год. Машины будут сдаваться в аренду за 12 000 долларов в месяц различным организациям.

«Ремингтон Ранд» производит в настоящее время вычислительные машины УНИВАК (РЖМат, 1953, 934) по одной машине в месяц. В будущем году эта фирма предполагает выпускать более совершенные электронные машины ИРА 1103 (РЖМат, 1953, 933), которые будут продаваться по 850 000 долларов.

Е. А. Волков

1857. Первая недорогая электронная вычислительная машина (The first low-cost «robot brain» electronic computer...), Tele-Tech, 1953, **12**, № 5, 65 (англ.)

Общий вид машины ЭЛЕКОМ-100 (ELECOM 100), построенной фирмой «Ундервуд» (Underwood Corp.) (см. фото). Машина выполняет 1700 действий в 1 мин.

Н. Я. Матюхин

1858. Недорогая вычислительная машина с объемом запоминающего устройства 102 400 чисел (Low-cost computor remembers 102, 400 «words»), Afric. Office Manag. and Appliances, 1953, **1**, № 3, 9 (англ.)

Сообщается об универсальной электронной вычислительной машине ЭЛЕКОМ-100. Запоминающее устройство на магнитном барабане вмещает 512 двоичных чисел. Каждое число содержит 29 разрядов и знак. На магнитной ленте может храниться 102400 десятичных чисел по 9 разрядов. Время записи или выборки команды с магнитной ленты 1,25 сек. Основная частота повторения импульсов в машине 115 *кгц*, время на одну операцию в среднем 46 мсек. Ввод и вывод чисел в десятичном виде. Результат печатается со скоростью 7,5 знаков в 1 сек. (см. реф. 1857).

Н. Я. Матюхин

1859. Недорогая вычислительная машина («Low-cost» computer), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 22 (англ.)

См. реф. 1857.

1860. Выставка физического общества (Physical Society's exhibition), Wireless Engr, 1953, **30**, № 5, 128—129 (англ.)

На 37-й ежегодной выставке Физического общества в Лондоне была экспонирована электронная цифровая вычислительная машина «Эллиот-401» (РЖМат, 1953, 1435—1436). Кроме приводившихся ранее данных указывается, что машина питается трехфазным током, потребляя 5 *квт*.

1861. Быстродействующая электронная цифровая вычислительная машина (A high-speed automatic electronic digital computer...) Engrs' Digest, 1953, **14**, № 5, 184 (англ.)

См. реф. 1860.

1862. Электронные вычислительные машины (Les machines à calculer électroniques), Haut-parleur, 1953, **29**, № 938, 12—13 (франц.)

Популярная статья об электронных вычислительных машинах.

1863. Совершенные числа. Р и д (Perfect numbers. Reid Constance), Scient. American, 1953, **188**, № 3, 84—86 (англ.)

В популярной форме излагаются факты, относящиеся к совершенным числам (целым числам, являющимся суммой всех своих собственных делителей). Автор сообщает, что в январе 1952 г. на быстродействующей вычислительной машине СВАК (SWAC) в Лос-Анжелосе была начата работа по определению того, какие из чисел вида 2^n-1 являются простыми. К этой задаче сводится отыскание четных совершенных чисел.

В процессе вычислений приходилось иметь дело с числами, изображение которых в двоичной системе требует 2300 знаков, что создавало значительные трудности, так как машина рассчитана на работу с числами в 36 двоичных знаков. Программа вычислений содержала 184 команды и была рассчитана на решение вопроса о простоте чисел вида 2^n-1 от $n=3$ до $n=2297$.

В случае, если исследуемое число оказывалось простым, машина печатала строчку из сплошных нулей. Чтобы установить по методу Люка (Lucas E.), что число $2^{257}-1$ является составным, машине потребовалось 48 сек. В результате вычислений, которые, по сообщению автора, продолжались до октября 1952 г., было обнаружено пять новых совершенных чисел, наибольшее из которых есть $2^{2280}(2^{2281}-1)$. Число $2^{2281}-1$ является наибольшим индивидуально известным в настоящее время простым числом. Приведена фотография машины.

М. Р. Шура-Бура

1864. Об изготовлении простых математических машин (About the making of simple mathematical machines...), Scient. American, 1953, **188**, № 5, 104—107 (англ.)

В заметке говорится о простых релейных машинах для различных математических игр, для решения логических задач и для выполнения основных арифметических операций.

Приведены релейно-контактные схемы, моделирующие основные логические операции, а также изображена и описана схема для решения логической задачи, аналогичной известной задаче о крестьянине, который должен перевезти через реку волка, козу и капусту. *В. И. Шестаков*

1865. «Армёр Рисёрч Фундейшн» получает электрическую счетную машину (Armour Research Foundation to get electric super-brain), Midwest Engr, 1953, 5, № 9, ч. 1, 28 (англ.)

Сообщение о предполагаемой установке в марте 1953 г. электронной вычислительной машины фирмы ИБМ с программированием на перфокартах в вычислительном центре «Армёр Рисёрч Фундейшн» Иллинойского технологического института, который является единственной коммерческой вычислительной организацией в районе Чикаго. *В. А. Зимин*

1866. Экспорт счетных машин (Export of «Brains»), Sheet Metal Inds, 1953, **30**, № 313, 423 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1459.

1867. Доклад о вычислительных машинах для членов Вашингтонской секции АФКА — Ассоциации связи вооруженных сил (AFCA Washington chapter members hear report on computers), Telecommuns Repts, 1953, **19**, № 24, 28 (англ.) (AFCA—Armed Forces Communications Association.— *Прим. ред.*)

Указывается на важность широкого применения вычислительных машин в связи с тем, что количество конторских служащих в США растет втрое быстрее числа людей, занятых на производстве, и уже сейчас превосходит число людей, занятых в сельском хозяйстве.

Сообщается, в частности, что военно-воздушные силы работают над электронной счетной машиной, которая будет подсчитывать данные о личном составе материальной части, обучении и т. п., основываясь на планах штаба. *Н. Я. Матюхин*

1868. Моделирующее устройство РЕАК, установленное на испытательной станции Военно-морского флота. Янг (The NOTS REAC. Young F. H.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 4, 237—243 (англ.)

Цифровые машины неудобны тогда, когда приходится производить исследование влияния вариации параметров на решение уравнений. Такие исследования весьма просто производить при помощи электронных моделей. Одной из таких моделей является устройство РЕАК (REAC), установленное на испытательной станции Военно-морского флота (Naval Ordnance Test Station—NOTS) в Инйокерн (Inyokern) на Китайском Озере в Калифорнии (China Lake, Cal.) и сданное в эксплуатацию в октябре 1951 г.

Моделирующее устройство РЕАК предназначено для исследования проблем, описываемых линейными и нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Оно содержит множительные, делительные и нелинейные звенья.

Усилители РЕАК имеют очень высокий коэффициент усиления порядка 10^7. Интегрирующие емкости постоянны и равны 1 *мф*. Сопротивления связей могут изменяться от 10 000 *ом* до 10 *Мом*. Для множительных и делительных звеньев используются потенциометры сопротивлением 30 000 *ом*, приводимые в действие от сервомотора. Нелинейные преобразователи основаны на использовании катодных трубок с непрозрачной ширмой, вырезанной по заданной функции. Для ввода эмпирических функций используются также вращающиеся барабаны, приводимые в движение от сервомотора. На поверхности барабана наклеена тонкая проволока по заданной функции. Полоска сопротивления, касающаяся проволоки, образует делитель напряжения и дает возможность получить заданную функцию в виде напряжения. Интегральные кривые в функции времени или на фазовой плоскости вычерчиваются автоматически на специальном чертежном столе. Рассматриваемое устройство РЕАК содержит 14 интеграторов, что позволяет решать семь дифференциальных уравнений второго порядка.

Даны схемы множительного и делительного звеньев, а также составлена схема для уравнения второго порядка.

Указывается, что из 300 имеющихся в США устройств РЕАК едва ли существует пара полностью тождественных, т. к. эти моделирующие устройства непрерывно модифицируются. *Н. В. Корольков*

1869. Моделирующее устройство, работающее на принципе теплообмена (Analog computer works on heat-exchange principle), Mach. Desing, 1953, **25**, № 5, 104 (англ.)

Анонимное сообщение о том, что одной из новейших работ фирмы «Арма» (Arma Corp.) является разработка моделирующего устройства, в котором выполнение расчетов производится при помощи теплообмена. Устройство не имеет никаких движущихся частей и по размеру соответствует пачке сигарет. *Д. П.*

1870. Вычислительное устройство для расчета вентиляционных сетей. Скотт, Хадсон, Хинсли (A calculator for the solution of ventilation network problems. Scott D. R., Hudson R. F., Hinsley F. B.), Trans. Instn Mining Engrs, 1953, **112**, № 8, 624—637 (англ.)

Дается описание принципов действия и конструкции моделирующего устройства для расчета вентиляционных сетей, а также описывается методика подготовки данных и работы с ним.

Моделирующее устройство имеет 54 переменных регулируемых сопротивления, амперметр, вольтметр и смонтировано в ящике, устанавливаемом на столе.

При расчете вентиляционных сетей необходимо решать системы уравнений вида:

$$\Sigma P = 0, \tag{1а}$$

$$\Sigma Q = 0. \tag{1б}$$

Уравнения (1а) означают, что по любому замкнутому воздухопроводу алгебраическая сумма перепадов давления P на отдельных участках равна нулю. Уравнения (1б) означают, что в любом узле (соединении воздухопроводов) алгебраическая сумма протекающего количества воздуха Q в единицу времени равна нулю. При этом P и Q на отдельных участках воздухопроводов, на которых нет источников перепада давления (вентиляторов), связаны зависимостью

$$P = CQ^n, \tag{2}$$

где постоянная C характеризует данный участок воздухопровода и может быть названа его воздушным сопротивлением, n — постоянно.

Для решения уравнений (1) и (2) моделирующее устройство настраивается по электрической схеме, которая аналогична по конфигурации исследуемой вентиляционной сети. При этом сумма падения напряжений E по любому замкнутому участку электрической цепи равна нулю, и сумма сил токов I, притекающих в любой узел, равна нулю, т. е.

$$\Sigma E = 0, \quad (3а)$$

$$\Sigma I = 0. \quad (3б)$$

При этом E и I на отдельных участках электрических цепей связаны зависимостью

$$E = SI, \quad (4)$$

где S — электрическое сопротивление.

Уравнения (3) для E и I совпадают соответственно с уравнениями (1) для P и Q, однако уравнения (4), связывающие между собой E и I, и уравнения (2), связывающие между собой P и Q, не совпадают. Поэтому для моделирования решения системы уравнений (1), (2) при помощи уравнений (3), (4) необходимо подобрать такие сопротивления S на всех участках цепей, которые удовлетворяли бы условиям

$$S = CI^{n-1}.$$

Подбор сопротивлений производится ручной регулировкой по шкалам устройства при помощи следующего итерационного процесса:

$$S_{m+1} = \frac{S_m}{n}\left[1 + (n-1)\frac{I_{m+1}}{I_m}\right].$$

Моделирующее устройство значительно сокращает время, необходимое для расчета, позволяет без больших трудностей производить выбор наивыгоднейшей вентиляционной сети, выбор наилучшего расположения вентиляторов (которые моделируются в устройстве при помощи э. д. с.) и т. п. Моделирующее устройство находит применение при проектировании подземных шахт и т. д.

Точность устройства лежит в пределах нескольких процентов и, по словам авторов, может быть увеличена. Устройство питается от обычной цепи переменного тока, максимальная потребляемая мощность 180 *вт*. Приведена фотография устройства, схемы отдельных его узлов, материалы дискуссии.

Е. А. Волков

1871. Электрическая модель для расчета вентиляционной сети. Скотт, Хадсон, Хинсли (A ventilation calculator. Scott D. R., Hudson R. F., Hinsley F. B.), Colliery Guard., 1953, **186**, № 4809, 553—556 (англ.)

Расчет вентиляции подземных шахт может быть произведен при помощи электрической модели вентиляционной сети. Аэродинамические сопротивления нелинейны и поэтому решение производится путем последовательных приближений. После установки первого приближенного значения сопротивлений производят измерения токов и напряжений, а затем вычисляют по найденным значениям (или находят по графику) новые значения сопротивлений (см. реф. 1870). Итеративный процесс сходится весьма быстро: обычно достаточно четырех приближений, чтобы достичь предела точности модели.

Осуществленная установка содержит 54 переменных сопротивления различной величины. Максимальное значение сопротивлений от 250 до 250 000 *ом*. В установке имеются высокоомный вольтметр и амперметр постоянного тока с переключением пределов измерений. Для моделирования вентиляторов имеются три независимых источника постоянного тока с регулируемым напряжением. Приведен пример расчета. Погрешность решения, приведенного в статье, составляет в среднем 2% (наибольшая — 8%).

Н. В. Корольков

1872. Моделирующее устройство для исследования следящих систем. Бальхен (Analogiregnemaskin for servoproblemer. Balchen Jens G.), Tekn. ukebl., 1953, **100**, № 23, 498—502 (норв.)

Моделирующее устройство содержит следующие основные элементы: сумматор, интегратор, фазоинвертор (для изменения знака функции), множительно-делительное устройство и функциональный преобразователь. Математические величины (функции) представлены в машине электрическими напряжениями, а независимой переменной является время.

Усилители с большим коэффициентом усиления (более 10^4), полоса пропускания — от нуля до 1000—10 000 пер/сек. Принцип действия множительно-делительного устройства не описан. Для функционального преобразователя использована схема с диодами.

На примерах показано, как составляется схема для линейного уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка, для нелинейного уравнения второго порядка с переменным коэффициентом и для моделирования некоторой следящей системы. В последнем случае уравнения не выписаны, а модель строится по элементам с соблюдением структурных связей моделируемой системы. Точность решения задач от 0,1 до 5%. Приведена фотография моделирующего устройства ГЕДА (GEDA) с 24 усилителями. По словам автора, в Норвегии имеется две такие установки; одна из них — в Норвежской высшей технической школе.

Н. В. Корольков

1873. Моделирующие устройства для расчета систем автоматического контроля с обратной связью. Бранс (Analogue computers for feedback control systems. Bruns R. A.), Electrical Engng, 1953, sec. 1, **72**, № 3, 211 (англ.)

Составлена структурная схема электронно-ламповой модели системы автоматического контроля при наличии ряда нелинейных элементов и источников помех («шума»). В схеме имеются три интегрирующих звена, три быстродействующих электромеханических контактных реле, один нелинейный преобразователь напряжения, два генератора «шумов» и несколько усилителей и потенциометров. Преобразователь возводит в квадрат величину напряжения и состоит из потенциометра, приводимого в движение двигателем следящей системы. Одно интегрирующее звено с потенциометром в цепи обратной связи служит для создания времени запаздывания. Два других интегрирующих звена, преобразователь и одно реле моделируют нелинейное дифференциальное уравнение

$$\theta_d = A_2\ddot{\theta}_0 + A_4\dot{\theta}_0 \pm A_5\dot{\theta}_0^2.$$

Контакты двух реле, действующих на выходе уси-

лителей, играют роль ограничителей величин напряжений.

Модель используется для изучения реакции системы контроля на типовые виды сигналов, действующих на ее входе, при наличии внешнего и внутреннего источников помех. *Л. И. Гутенмахер*

1874. Исследование передачи по силовой линии при помощи моделирующего устройства. Мойнихан (Application of power-line carrier by analogue computer studies. Moynihan J. D.), Electrical Engng, 1953, sec. 1, 72, № 1, 58—62 (англ.)

Показано, что при помощи электрической модели можно легко произвести необходимые исследования для налаживания тракта высокочастотной (в. ч.) передачи по силовой линии. При этих исследованиях весьма просто удается установить и устранить влияние таких факторов, которые ранее приводили к неудачам (например, резонанс линейного фильтра и трансформатора, который для высокой частоты эквивалентен емкости).

Для исследования составляется электрическая схема-модель электрической силовой системы, включая линию передачи, фидеры, трансформаторы и другие элементы. Схема составляется с учетом условий подобия. Исследования на модели производятся на звуковой частоте (от 200 до 1000 *гц*), что позволяет легко производить измерения с большой точностью.

Приводятся примеры построения отдельных деталей модели для двухканальной системы в. ч. передачи. *Н. В. Корольков*

1875. Конструкция простой электронной модели флаттера. Смит, Хикс (Design of a simple electronic flutter simulator. Smith F., Hicks W. D. T.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1953, **57**, № 505, 29—38 (англ.)

Описывается принцип и конструкция основных узлов электрической модели для исследования явления флаттера (автоколебания крыла в потоке).

Задача приведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Необычной для электрических моделей является схема основного усилителя (однокаскадный, пушпульный, К-50; использована и положительная и отрицательная обратная связь). Авторы указывают, однако, что для модели с шестью степенями свободы применены другие усилители с большим коэффициентом усиления.

Приведены графики исследований влияния различных параметров для конкретного примера. Точность решения порядка 1%. Приведена фотография установки. Ссылка на предыдущую работу одного из авторов (Smith F., Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1949, № 26). *Н. В. Корольков*

1876. Электроаналогия крутильных колебаний, построенная при помощи сопротивлений. О'Каллахан (Eine elektrische Widerstandsanalogie zu drehschwingenden Systemen. O'Callaghan Thomas), Frequenz, 1953, **7**, № 4, 112—116 (нем.)

Предлагается новая аналогия между соотношениями ряда величин в электрической схеме, состоящей из цепочки сопротивлений и источников тока, и рядом величин в механической системе, состоящей из вращающихся масс, насаженных на общий вал.

Уравнение, связывающее значения квадрата резонансной частоты ω, моментов инерции двух вращающихся на концах одного вала масс λ и μ и коэффициента жесткости вала K,

$$\omega^2 = K\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right]$$

аналогично уравнению, которое определяет силу тока i при двух параллельных сопротивлениях $a\lambda$ и $a\mu$, приключенных к общему источнику тока напряжением εK,

$$i = \varepsilon K\left[\frac{1}{a\lambda} + \frac{1}{a\mu}\right].$$

В этой аналогии для одной пары масс сила тока i соответствует квадрату частоты ω^2, сопротивления — моментам инерции и напряжение — коэффициенту жесткости.

Показана возможность разбивки на такие элементарные пары произвольной системы, состоящей из большого числа вращающихся масс, расположенных на одном валу. Для введения отрицательных членов в уравнения используется мостиковая схема.

Приведена принципиальная схема прибора, основанного на этой аналогии, предлагаемого для решения ряда задач, связанных с крутильными колебаниями. *Л. И. Гутенмахер*

1877. Электрические модели физических явлений. Френкель (Modelele electrice ale fenomenelor fizice. Fränkel Maximilian), Gaz. mat. şiffiz., 1953, **5**, № 2, 60—68 (рум.)

Подробное изложение содержания брошюры Л. И. Гутенмахера «Электрические модели и их применение в технике и физике» (стенограмма публичной лекции для инженерно-технических работников), изд-во «Правда», 1949.

Автор отмечает перспективность электрического моделирования и расценивает развитие электрического моделирования как достижение советской науки. *Н. В. Корольков*

1878. Новое в области вычислительных машин (Computer progress), Mod. Industry, 1953, **25**, № 3, 78, 80, 82 (англ.)

Сообщается об аппарате АУДРИ (РЖМат, 1953, 996). Указывается, что в настоящее время фирма «Белл» разрабатывает более совершенный аппарат.

Сообщается о выпуске машины ОАРАК (см. реф. 1842) и о выпуске фирмой «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» недорогих машин размером с письменный стол, предназначенных для решения дифференциальных уравнений (РЖМат, 1953, 488).

В ближайшее время фирмой «Вестингауз Электрик» (Westinghouse Electric Corp.) будет закончена постройка «самого большого в мире расчетного стола переменного тока», предназначенного для Франклиновского института в Филадельфии.

Фирма «Хейлди Электроникс» (Haledy Electronics Co.) выпустила новую серию быстродействующих счетчиков, предназначенных для управления технологическим процессом.

Фирма «Миннеаполис — Хонейвелл» (Minneapolis-Honeywell) выпускает небольшие вычислительные устройства для расчета температур и вентиляционных систем в сельскохозяйственных помещениях.

Фирма «Бекман Инструментс» (Beckman Instruments) выпустила электронное моделирующее устройство (сокращенное название EASE) для расчета турбин, реактивных двигателей самолетов и т. п.

Национальное Бюро стандартов США разрабатывает стандартные блоки для вычислительных машин. Использование стандартных блоков упростит конструирование и эксплуатацию машин, а также понизит их стоимость и увеличит надежность работы (см. реф. 1841). *Е. А. Волков*

1879. Счетчик с предварительной установкой (Preset counter), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 1, 115 A—116 A (англ.)

Фирма «Беркли» (Berkeley Scientific Co.) сообщает о выпуске счетчика с предварительной установкой, состоящего из счетчиков типа 730 (РЖМат, 1953, 950) в количестве от 2 до 6.

1880. Цифровой самописец (Digital recorder), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 1, 83 (англ.)

Сообщение фирмы «Беркли» (Berkeley Scientific Division of Beckman Instruments, Inc.) о цифровом самописце типа 1550, который печатает показания электронных счетчиков с максимальной скоростью 75 чисел в 1 мин. Прибор состоит из приемного регистра чисел с релейным дешифратором и печатающего устройства. Приведена фотография прибора. *Н. Я. Матюхин*

1881. Цифровой самописец (Digital recorder), Nucleonics, 1953, **11**, № 2, 88, 90 (англ.)

См. реф. 1880.

1882. Счетчик на лампах с холодным катодом (Cold-cathode counter), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 5, 23 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 952. Указано, что максимальная рабочая частота равна 250 *гц*. *Н. Я. Матюхин*

1883. Печатающий счетчик «Аметрон» (Ametron recording counter), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 1 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 947.

1884. Ультразвуковые линии задержки (Ultrasonic delay lines), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 4, 29 (англ.)

Сообщение фирмы «Андерсен» (Andersen Laboratories, Inc.) о выпуске твердых ультразвуковых линий задержки из плавленого кварца с полосой более 12 *Мгц* и уровнем шумов—50 *дб*; полное затухание сигнала лежит в пределах 34 ÷ 50 *дб* в зависимости от величины оконечного импеданса. *Н. Я. Матюхин*

1885. Новая лента для магнитной записи (New recording tape), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 4, 93, 107 (англ.)

Сообщение фирмы «Миннесота майнинг энд мануфэкчуринг» (Minnesota Mining and Manufacturing Co.) о новой магнитной ленте, отдача которой в два раза больше, чем у обычных лент. *Н. Я. Матюхин*

1886. Печатные схемы (Printed circuits), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 1, 188 (англ.)

Фирма «Спрейг» (Sprague Electric Co.) выпустила бюллетень с описанием печатных схем, производимых фирмой, в том числе схем многокаскадных усилителей. *Н. Я. Матюхин*

1887. Германий и германиевый триод (Germanium and the transistor), Engineer, 1953, **195**, № 5075, 647 (англ.)

Рост применения германиевых триодов в военном и гражданском электронном оборудовании явился, пожалуй, наиболее значительным достижением, отмеченным на ежегодном собрании и на выставке Института радиоинженеров в Нью-Йорке в марте 1953 г. Здесь демонстрировались портативные установки беспроволочной связи, слуховые аппараты с батарейным питанием, выполненные полностью на германиевых триодах (без ламп), а также различные конструкции портативного оборудования связи, разработанного для армии. Современные достижения в области электроники твердых тел должны вызвать в ближайшем будущем большие изменения в промышленности. Сейчас, когда приближается пятидесятилетие вакуумной лампы, ей противопоставляется ее первый серьезный конкурент — германиевый триод.

Большое внимание уделяется извлечению и очистке германия. В отличие от золы английского угля, зола американского угля имеет относительно низкое содержание германия. До настоящего времени главным источником германия в Америке была топочная зола, получающаяся при плавлении цинка. В последнее время крупные производители нежелезных металлов уже прилагают усилия к тому, чтобы извлечь германий в качестве побочного продукта их плавильных заводов. Правительство поддерживает промышленников, занимающихся получением германия.

Ряд очевидных преимуществ обеспечивает возможность широкого применения германиевых триодов в авиации, в управляемых снарядах и в других аппаратах военного применения. В каждом из телевизоров, которые предполагалось выпустить в США в 1953 году, будет, вероятно, по несколько германиевых триодов. Около сорока компаний сейчас работают над изготовлением или применением этих устройств. Электронная счетная машина «Ремингтон Ранд», которая весит около 10 *т* и содержит 4500 ламп, могла бы иметь значительно меньшие размеры, если бы германиевые триоды были выпущены во время. *Н. И. Бродович*

1888. Германий и его применение в электронике. Клерич (Il germanio e le sue applicazioni nell'elettronica. Clerici Guido), Elettrificazione, 1953, **4**, № 2, 1—3 (итал.)

Приведены краткие сведения о технологии производства германия из цинковой обманки, вкратце разобран механизм проводимости германия типов *n* и *p*. Описаны германиевые диоды и триоды с точечным контактом и триод типа *n-p-n*. Указывается, что существуют германиевые диоды с выпрямленным током в несколько сот ампер и мощностью рассеяния 1 *квт*. Эти диоды имеют водяное или воздушное охлаждение и площадь контакта порядка 1 *см*². *Н. Я. Матюхин*

1889. Германиевые триоды заменяют вакуумные лампы в усилительных схемах (Transistors replace vacuum tubes in amplification systems),

Industr. and Engng Chem., 1953, **45**, № 5, 85A (англ.)

Современные вакуумные лампы не обладают достаточным сроком службы. В тех случаях, когда требуется увеличить срок службы ламп, приходится производить перерасчет элементов схем, вводя большой запас надежности, а иногда даже дублировать схемы для повышения надежности их работы.

Поскольку срок службы и надежность имеют большое значение во многих устройствах (как, например, в быстродействующих электронных счетных машинах, в усилительных схемах, применяемых для военно-морского флота, и др.), возникает интерес к безламповым усилительным элементам: магнитным усилителям и германиевым триодам.

В изготовлении материалов для сердечников магнитных усилителей за последние десять лет имеются значительные достижения. Однако широкому распространению систем с магнитными усилителями еще препятствуют большой вес и наличие запаздывания, нежелательного в системах с обратной связью.

В качестве заменителей ламповых схем большие возможности открывают разработанные за последние два гда усилители на германиевых триодах. Развитие производства германиевых триодов ограничивается недостатком германия и трудностями технологии. С ростом выпуска триодов потребность в германии все увеличивается: в 1952 г. она составляла 3 *т*, а в 1953 г. уже 20 *т*. В то же время цена германия остается очень высокой. Один фунт германия, получаемого в качестве побочного продукта рафинирования цинка, стоит около 350 долларов. Для изготовления триодов применяются почти совершенно чистые кристаллы германия. (Незначительные количества примесей мышьяка или сурьмы содержатся в германии с проводимостью электронного типа; незначительные количества примесей галлия или индия — в германии с проводимостью дырочного типа.) В настоящее время при помощи схем с германиевыми триодами получают усиление, приближающееся к тысячекратному. Следует ожидать, что германиевые триоды, обладающие весьма малыми по сравнению с электронными лампами объемом, весом и потреблением электроэнергии, будут иметь срок службы до 10 лет. *Н. И. Бродович*

1890. Отрицательное сопротивление в германиевых диодах. К о к (Negative resistance in germanium diodes. K a u k e J a m e s), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 4, 8—10 (англ.)

При приложении достаточно большого постоянного напряжения обратной полярности к германиевому диоду, последний приобретает отрицательное динамическое сопротивление. Описаны схемы генератора пилообразных напряжений, генератора синусоидальных колебаний, усилителя напряжения и триггера, в которых используется диод в режиме отрицательного сопротивления.

Предельная частота, до которой получали усиление — 5 *кгц*; на частоте 1 *кгц* коэффициент усиления 2 ÷ 4. Генератор синусоидальных колебаний на частоте 180 *гц* развивал напряжение 1 *в*. Схемы требуют индивидуальной регулировки из-за большого разброса параметров диодов и их температурной нестабильности. Диоды с точечным контактом в описанном режиме обычно рассеивают мощность больше номинальной и срок службы их несколько сокращается. *Н. Я. Матюхин*

1891. Метод исследования полупроводниковых триодов (Transistor research aid), Steel, 1953, **132**, № 7, 83 (англ.)

Электрические свойства германия и других полупроводников в сильной степени зависят от присутствия или отсутствия незначительных количеств некоторых примесей. Материал, применяемый для изготовления полупроводникового устройства, предварительно очищается, а затем в него добавляется примесь, количество которой дозируется в процессе изготовления. Измерение чрезвычайно малых количеств примесей не может быть произведено обычными методами, используемыми для химических измерений, поэтому фирмой «Сильвания» (Sylvania Electric Products Co.) применяются радиоактивные методы, позволяющие замерить количество примеси, составляющее $\frac{1}{100\,000\,000}$ часть материала германия.

Для плавления германия используются контейнеры из самого чистого графита. Контейнеры облучаются нейтронами в ядерном реакторе в Brookhaven National Laboratories.

В процессе плавления малые количества радиоактивных примесей переносятся в германий из облученного контейнера. Перенесенные количества могут быть замерены стандартными методами измерения интенсивности и степени понижения радиоактивной эмиссии при помощи имеющихся в продаже приборов. *Н. И. Бродович*

1892. Исследование методом измерения радиоактивности (Radioactivity research), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 5, 22 (англ.)

См. реф. 1891. Приведена фотография установки. *В. Б.*

1893. Полупроводниковые триоды из Al, Ga, In (Transistors of Al, Ga, In), Sci. News Letter, 1953, **63**, № 15, 235 (англ.)

Новые материалы для полупроводниковых триодов, заменяющие германий, представляют собой сплавы алюминия, галлия, индия с мышьяком и сурьмой; они во много раз дешевле германия. Новые материалы уже испытывались в выпрямительных схемах в лабораториях «Бэттел Мемориал Институт» (Battelle Memorial Institute). Сплавы из алюминия и сурьмы, вероятно, будут превосходить германий в условиях работы при повышенной температуре. *Н. М.*

1894. Полупроводниковый материал (Semiconductor material), Mech. Engng, 1953, **75**, № 5, 401 (англ.)

Согласно сообщениям «Бэттел Мемориал Институт» (Battelle Memorial Institute), найден новый полупроводниковый материал — алюминий-сурьма, который благодаря своей дешевизне и высокой рабочей температуре может соперничать с германием и кремнием в применении для изготовления выпрямителей, полупроводниковых триодов и фоточувствительных электронных устройств. Так же как кремний и германий, алюминий-сурьма имеет кристаллическую структуру, подобную структуре алмаза, но его решетка состоит из атомов двух родов. В лаборатории уже изготовлены выпрямители из этого материала (см. реф. 1893). *Н. И. Бродович*

1895. Полупроводниковые триоды без германия (Transistors sans germanium), Électricité, 1953, **37**, № 194, 102 (франц.)

Новый материал для полупроводниковых триодов, заменяющий германий, разработанный фирмой «Браун-Аллен» (РЖМат, 1953, 1479), будет выпускаться в 1953 г. ее филиалом «Пьезо Стандард» (Standard Piezo Co.). Стоимость его в сто раз меньше, чем чистого германия. Материал пригоден для работы в широком диапазоне температур. Химический состав его не сообщается (ср. реф. 1893, 1894).
Н. Я. Матюхин

1896. Полупроводниковые триоды «Дженерал Электрик» (G-E transistors), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 77 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске герметизированного триода типа *n-p-n*, пригодного для работы в условиях повышенной влажности и при температуре до 100° (РЖМат, 1953, 1474). *Н. Я. Матюхин*

1897. Полупроводниковые триоды с поверхностными контактами и выпрямители (Junction transistors and rectifiers), Tele-Tech, 1953, **12**, № 5, 103 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о положительных результатах испытания полупроводникового выпрямителя типа 1N94, помещенного в кипящую воду. Выпрямитель питался переменным током напряжения 130 *в* при частоте 50 *кгц*. На выходе выпрямителя был получен ток в 500 *ма* (см. реф. 1896). *Е. А. Волков*

1898. Германиевые сетевые выпрямители (Germanium-Netzgleichrichter), Radio Mentor, 1953, **19**, № 4, 165 (нем.)

Для германиевых выпрямителей «Дженерал Электрик» приведены вольт-амперные характеристики и кривые допустимых токов нагрузки при работе в режиме сетевого выпрямителя с различными максимальными запирающими напряжениями. Характеристики и кривые даны для температур окружающей среды 25° и 55°. *Н. И. Бродович*

1899. Германиевые диоды (Germanium diodes), Radio and Telev. News., 1953, **49**, № 4, 26 (англ.)

Фирма «Амперекс» (Amperex Electronic Corp.) сообщает о выпуске семи типов герметизированных диодов, пригодных для работы в различных атмосферных условиях и при низких температурах.
Н. Я. Матюхин

1900. Германиевые диоды (Germanium diodes), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 1, 188 (англ.)

Фирма «Амперекс» (Amperex Electronic Corp.) выпустила проспект с данными новых германиевых диодов (см. реф. 1899). *Н. Я. Матюхин*

1901. Точечно-контактные полупроводниковые триоды (Point-contact transistors), Current Sci., 1953, **22**, № 3, 92 (англ.)

Фирма «Филипс» в Голландии объявляет о предстоящем производстве точечно-контактных полупроводниковых триодов двух типов: OC50 и OC51. Первый из них (OC50) выпускается как триод общего применения для усилительных целей, а второй (OC51) предназначается для коммутационных применений.

Триоды имеют вид маленького патрона длиной около 12,5 *мм* и диаметром в 6,25 *мм* с двумя проволочными выводами с одной стороны (третьим выводом является металлический корпус).
Н. И. Бродович

1902. Полупроводниковые триоды «Вестингауз» (Westinghouse transistors), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 22 (англ.)

Сообщение фирмы «Вестингауз Электрик» (Westinghouse Electric Corp.) о выпуске полупроводникового триода с большим сроком службы.
Н. Я. Матюхин

1903. Типы германиевых и кремниевых диодов, имеющихся в наличии в настоящее время в качестве выпрямителей, детекторов и преобразователей частоты. Аллен (Features of germanium and silicon diodes now available as rectifiers, detectors and frequency converters. Allen L. M.), Radio Telev., Electronic Serv., 1953, **22**, № 3, 42, 73 (англ.)

Перечислены типы и назначение германиевых и кремниевых диодов, применяемых в настоящее время в электронике. Дан чертеж габаритных размеров различных исполнений диодов, поперечный разрез двух типов германиевых диодов и фотография тестера фирмы G. E. типа ST-12-A для испытания диодов.

Примечание референта. Более полные данные относительно всех приведенных в статье диодов, за исключением типов IN78 (смеситель для 16000 Мгц), IN76 (детектор для 9000 Мгц) и IN66 (диод общего назначения), можно найти в таблице полупроводниковых диодов, напечатанной в журнале Electronics, 1952, **25**, № 3, 112—113.
Н. И. Бродович

1904. Усилители на полупроводниковых триодах. Тернер (A transistor pre-amp. Turner Rufus P.), Radio-Electronics, 1953, **24**, № 2, 54 (англ.)

Сообщается о выпуске фирмой «Райтеон» (Raytheon Mfg Co.) нового полупроводникового триода с точечным контактом типа СК-716, который по сравнению с ранее выпускаемым триодом СК-703 обладает бо́льшим коэффициентом усиления напряжения и позволяет построить более простые усилители.

Приводятся принципиальные схемы двух миниатюрных усилителей напряжения на полупроводниковых триодах СК-716 с заземленными базами, и дается подробное описание этих схем. Коэффициенты усиления 50 и 46. Недостатком усилителей на триодах СК-716 является большое выходное сопротивление при малом входном сопротивлении, что значительно затрудняет осуществление многокаскадного усиления напряжения. *Е. А. Волков*

1905. Усилитель на полупроводниковом тетроде (Transistor repeater), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 6, 22 (англ.)

Сообщение фирмы «Белл» о разработке экспериментального широкополосного усилителя на германиевом тетроде типа *n-p-n* (РЖМат, 1953, 484) Усилитель отдает 10 *мвт* неискаженной мощности на нагрузку 75 *ом*. Коэффициент усиления 13 в пределах полосы 0,4—11 *Мгц*. Усилитель может быть применен в телевизионных ретрансляционных

устройствах и оформлен в виде небольшой трубочки (диаметр 3,8 *мм*, длина 38,1 *мм*). Приведена фотография. *Н. Я. Матюхин*

1906. **Прибор для расчета прочности тары. Келликутт, Ландт, Сеттерхом** (Box-strength calculator. Kellicutt K. Q., Landt E. F., Setterholm V. C.), Mod. Packaging, 1953, 26, № 7, 121—123, 178, 179 (англ.)

Изготовление тары из разных сортов картона потребовало исследований, которые привели к формулам, выражающим временное сопротивление сжатию тары в зависимости от ее размеров и свойств материала. Чтобы упростить применение этих формул и учесть влияние условий эксплуатации (влажность на складе, продолжительность хранения), построен простой прибор, представляющий собой номограмму с подвижными частями (пять концентрических дисков и полоска с индексом, вращающиеся около общего центра). Этот прибор назван «калькулятором прочности тары» (box-strength calculator). По внешнему виду он напоминает известный прибор (простейший фотометр), применяемый фотографами для определения времени экспозиции. Дается описание теоретической и экспериментальной работы, проведенной для построения прибора, и рассматриваются примеры его использования для конструирования и эксплуатации картонной тары. Приведена фотография прибора. *В. М. Брадис*

1907. **Употребление счетов для четырех арифметических действий. Москович** (Utilizarea «sciotului» pentru cele patru operaţii aritmetice. Moscovici M.), Rev. mat. şi fiz., 1953, 4, № 6, 138—142 (рум.)

Дается подробное описание и принципы работы на обычных русских счетах.

1908. **Оборудование для бюро. Куленкамп** (Büromaschinen. Kuhlenkamp A.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1953, 95, № 19, 675—679 (нем.)

Краткое описание ряда новых приборов и машин, выпущенных некоторыми западно-европейскими и американскими фирмами, входящими в объединение «Бюромашинен»: новых моделей счетных линеек и вычислительных машин, пишущих машин, машин для выполнения бухгалтерских операций, в частности, множительных; дано описание светокопировальных аппаратов, аппаратов для изготовления микрокопий, чертежных принадлежностей, приведены новые конструкции секундомеров и других приборов для хронометража, а также некоторые средства наглядного изображения.

Новые счетные линейки отличаются материалом, шкалами, некоторыми приспособлениями, облегчающими отсчеты. Наряду с деревянными линейками, имеющими наклеенные целлулоидные или пластмассовые шкалы, появились цельнометаллические линейки и линейки целиком из пластмассы. Имеются линейки с расширенными показательными шкалами (от 10^{-5} до 10^{5}), с расширенными шкалами lg lg, со шкалами гиперболического синуса и тангенса, со шкалами нормальных чисел, с новым расположением шкал. Изготовляются линейки с бегунками, снабженными цилиндрическими лупами из плексигласа с более широким полем зрения. Появилась линейка со шкалами длиной в 1 *м* на стальных лентах, перематываемых с одного барабана на другой.

Новые модели вычислительных машин с ручным и электрическим приводом как рычажных, так и с клавиатурой, отличаются рядом особенностей. Описаны две электронные вычислительные машины, еще не поступившие в продажу. Библиография 8 названий. *В. М. Брадис*

1909 **РЕЦ. Математические машины и инструменты. Виллерс** (Mathematische Maschinen und Instrumente. Willers F. A., S. 318, 258 Abb., Berlin, Akademie-Verlag, 1951, 34 DM) [**Рецензии: Садовский Л.**, Новые книги за рубежом, 1953, № 1, 44—50; **Шпейзер** (Speiser A. P.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, 4, № 3, 232; **Леземан** (Lesemann K.-J.), Z. angew. Phys., 1953, 5, № 4, 159—160 (нем.)]

1910 **РЕЦ. Запоминающие трубки и основные принципы их работы. Нолл, Казан** (Storage tubes and their basic principles. Knoll M., Kazan B., pp. 143, New York, John Wiley and Sons., Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd., 1952, 3.00 doll.) [**Рецензии: Смит** (Smith S. T.), Electronics, 1953, 26, № 3, 476, 478; **Мечлер** (Mechler E. A.), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 1,84; **Аллард** (Allard L. S), J. Scient. Instrum., 1953, 30, № 3, 102; **Хикман** (Hickman R. E. B.), Electronic Engng, 1953, 25, № 304, 264—265 (англ.)]

1911 **РЕЦ. Нелогарифмическая линейка с линейными шкалами. Гродер** (Linear scale nonlogarithmic slide rules. Groder Morris L., pp. 64, G and G Corporation, N. Y., 2.98 doll.) [**Рецензия:** (IQ), Radio-Electronic, 1953, 24, № 5, 158 (англ.)]

1912 **Д. Исследование механизмов счета вычислительных машин. Булгаков И. С.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. высш. техн. училище, М., 1953

1913 **П. Счетная машина** (Calculating machine) [The British Tabulating Machine Co. Ltd.]. Австрал. пат. 149622, кл. 56, 2, 22.01.53

Множительное устройство с двумя накапливающими счетчиками, один из которых служит для установки множителя, а второй для получения произведения. Оба счетчика приспособлены для ввода как положительных, так и отрицательных данных, что позволяет производить алгебраическое суммирование. Множительное устройство снабжено приспособлением, которое сводит содержимое счетчика множителя к нулю путем автоматического последовательного ввода в него со знаком плюс или минус цифр 1, 2, 5 и 10, умноженных на 10 в соответствующей степени. Другое приспособление вводит одновременно множимое, умноженное на те числа, которые вычитаются из множителя, в счетчик, где образуется произведение. *В. А. Зимин*

1914 **П. Автоматическое расчетное устройство. Джоэл, Риппер** (Automatic accounting device. Joel Amos E., Jr. Rippere Robert O.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2630270, кл. 235—61,7, 3.03.53

Машина служит для составления счетов при расчётах с потребителями. Производится автоматическое начисление по истекшему времени для каждого счета. Общая и специальная информация о потребителях вводится в машину при помощи ленты. Машина может выполнять над информацией арифметические операции, сортировать, производить передачу и т. д. (РЖМат, 1953, 512). *Н. Я. Матюхин*

1915 П. Автоматическое расчетное устройство. Джоэл (Automatic accounting device. Joel Amos E., Jr.) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2630269, кл. 235—61,7,3.03. 53

Устройство для выполнения операции сравнения, состоящее из двух релейных регистров для хранения сравниваемых величин, схемы, управляющей передачей чисел в регистры, и схемы для индикации наличия или отсутствия соответствия между числами (см. реф. 1914). *Н. Я. Матюхин*

1916 П. Система запоминания данных для вычислительной машины (Computer storage system) [Eckert-Mauchly Computer Corp.]. Австрал. пат. 150816, кл. 05.5, 23. 04. 53.

Предлагается запоминающее устройство на электроннолучевой трубке. Двоичный код хранится на экране электроннолучевой трубки в виде электрического заряда различной формы. Заряд одной формы имеет вид круга, а другой — кольца. Кольцо имеет внутренний диаметр больше, чем внешний диаметр круга. Предусмотрен способ для такого восстановления записи заряда второго типа, что он будет концентричен по отношению к заряду первого типа. *В. А. Зимин*

1917 П. Система кодирования данных. Джонсон (Data encoding system. Johnson Eric Arthur). Пат. США 2630562, кл. 340—347, 3.03. 53

Аппарат для кодирования электрических данных при помощи коммутатора, имеющего ряд контактных сегментов и подвижный контактный ползунок с контактами в двух точках, попеременно контактирующий со следующими друг за другом контактными сегментами. Контактные сегменты и ползунок располагаются один по отношению к другому так, что в любой момент контакт происходит лишь в одной из двух контактных точек. Аппарат имеет ряд цепей кодовых элементов, каждая из которых соответствует определенному кодовому элементу многоэлементного кода; цепь состоит из канала «знак» и канала «место». Кроме того, имеются кодирующие цепи, обеспечивающие соединение каждого контактного сегмента с различными комбинациями каналов «знак» и «место» в соответствии с многоэлементным кодом, и выходные цепи, соединенные с каждой из кодовых цепей при помощи устройства, которое подает напряжение в выходную цепь в ответ на возбуждение соответствующего канала «знак» и другое напряжение в ту же выходную цепь в ответ на возбуждение соответствующего канала «место».

Источник напряжения соединен с двумя контактными точками ползунка таким образом, что при соединении с одной точкой возбуждается канал «знак», а при соединении с другой — канал «место». *В. С. Бородин*

1918 П. Автоматическая кодовая преобразующая система. Чезарео, Конти (Automatic code translating system. Cesareo Orfeo, County Bergen) [Bell Telephone Laboratories, Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2625328, кл. 235—61, 13.01. 53

Вычислительное устройство содержит: регистр для временного запоминания многозначных чисел, первая цифра которых является индикатором знака; ряд реле, получающих разные сигналы от цифры числа и от индикатора знака; печатающее устройство для записи знаков и чисел, реагирующее на кодированное напряжение присылаемого сигнала; преобразователь для преобразования электрических сигналов, представляющих числа, в кодированное напряжение сигнала, достаточное для приведения в действие печатающего устройства; инвертор в цепи между регистром и преобразователем, меняющий знак, заданный первой цифрой числа, на противоположный, управляемый одним из разрядных реле; второй инвертор в цепи между регистром и преобразователем для замены остальных цифр числа на их дополнения; устройства, реагирующего на электрический сигнал, определяющий знак, представленный первой цифрой числа в регистре и включающего второй инвертор; главного устройства управления, которое позволяет или 1) работать при постоянно включенном втором инверторе одним и тем же способом, или 2) передавать электрические сигналы, представляющие первую цифру числа, через первый инвертор и электрические сигналы, представляющие оставшиеся цифры,— через второй инвертор. В соответствии с этим число, находящееся в регистре, может быть по выбору или 1) записано в той форме, в которой оно имеется в регистре, или 2) преобразовано и записано как число в его истинной форме с предшествующим знаком. *В. С. Бородин*

1919 П. Геометрический инструмент. Каллахан (Geometrical instrument. Callahan Ezra Leo). Пат. США 2631376, кл. 33—93, 17. 03. 53

Инструмент, предназначенный для геометрических построений, состоит из треугольника с несколькими различными вырезами и вращающегося рычага. Угол между одной из сторон треугольника и прямым краем рычага определяется по специальной шкале и точно фиксируется через каждый градус при помощи специальных отверстий, расположенных по дуге с центром, совпадающим с центром вращения рычага.

Приводится чертеж инструмента. *Е. А. Волков*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

1920. Самолетное навигационное вычислительное устройство с управлением от перфокарт. Фриц (Punched-card controlled aircraft navigation computer. Fritze E. H.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 6, 734—742 (англ.)

Устройство, разработанное фирмой «Коллинс» (РЖМат, 1953, 1494), непрерывно, в течение всего полета, вычисляет курс и расстояние самолета до места назначения.

Оно состоит из двух навигационных приемников, определяющих магнитный пеленг двух различных маяков, вычислительного блока, определяющего положение самолета относительно одного из маяков (называемого основной станцией), и блока вычис

ления курса. Последний связан с приборами выдачи данных, находящимися в кабине пилота и состоящими из указателя курса и указателя дистанции.

Если предположить, что магнитные меридианы станций параллельны, то вычисление координат самолета требует решения плоского треугольника (вершинами которого служат самолет и два маяка), которое в свою очередь сводится к решению системы

$$\rho \sin(\theta_1 - \theta_2) = D \sin(\theta_2 - \lambda)$$
$$-x_1 \cos\theta_2 + y_1 \sin\theta_2 = y_s \sin\theta_2 - x_s \cos\theta_2$$
$$(y_1 - y_s)\sin\theta_2 - (x_1 - x_s)\cos\theta_2 = 0, \qquad (1)$$

где
$x_1 = -\rho \sin\theta_1$ $\quad x_s = D\sin\lambda$
и
$y_1 = -\rho\cos\theta_1$ $\quad y_s = D\cos\lambda$
— прямоугольные координаты самолета и вспомогательной станции,

ρ — расстояние от самолета до основной станции, D — расстояние от основной до вспомогательной станции, θ_2 — пеленг вспомогательной станции с самолета, θ_1 — пеленг основной станции с самолета, λ — пеленг вспомогательной станции с основной станции.

Расстояние моделируется переменным напряжением 400 *гц*, снимаемым с автотрансформатора, который приводится в действие мотором. Мотор управляется напряжением, пропорциональным левой части равенства (1).

До сих пор предполагалось, что пеленг маяков берется относительно одного и того же направления на магнитный север. Однако меридианы основной и вспомогательной станции различаются. Если за основное направление принять магнитный меридиан основной станции, то пеленг вспомогательной станции необходимо скорректировать на угол φ между меридианами этих станций. Коррекция вводится при помощи специальной схемы. Эта коррекция обычно не превышает 4 градусов.

Для введения исходных данных (λ, D, φ и частот маяков) применяется система перфокарт. Исходные данные нанесены в виде отверстий на пластинке из прочного материала. Отверстия определяют положение миниатюрных переключателей схемы считывания карт. Приведен вид типичной перфокарты. Карта составляется на пять пар станций, первые буквы названий которых нанесены на верхней части карты. При выборе станции пилот устанавливает буквы соответствующих станций в окне прибора. При этом переключатели схемы считывания встают в положения, обеспечивающие ввод данных выбранной пары станций.

В блок вычисления курса поступают координаты самолета от блока вычисления положения самолета и координаты пункта назначения, которые вводятся пилотом вручную при помощи селектора пункта назначения.

Блок курса вырабатывает напряжение дальности от самолета до пункта назначения в направлении оси самолета

$$F = x_T \sin\theta_3 + y_T \cos\theta_3,$$

где θ_3 — магнитный курс самолета,

$$x_T = x_1 + x_2$$
$$y_T = y_1 + y_2,$$

x_1 и y_1 — координаты самолета и x_2 и y_2 — координаты пункта назначения относительно основной станции.

Это напряжение выдается на обычный стрелочный прибор, отградуированный в милях. Кроме того, блок курса вырабатывает напряжение смещения самолета по перпендикуляру к истинной линии курса

$$G = x_T \cos\theta_3 - y_T \sin\theta_3.$$

Это напряжение подается на индикатор курса, который обеспечивает выдачу трех параметров полета: а) магнитный курс самолета, указываемый поворотом шкалы относительно неподвижной риски; б) заданный курс при помощи стрелочного указателя, в) смещение самолета, отмечаемое смещением стерженька, параллельного стрелке.

На индикаторе дистанции имеется сигнализация, сообщающая о выходе самолета из зоны действия маяков.

Исследования точностей, обеспечиваемых описанной системой, показали, что основным источником ошибок является неточность определения пеленга. Для станций, в которых исключены поляризационные ошибки и вблизи которых не расположены крупные отражающие объекты, такая ошибка может быть получена менее 2 градусов.

Вычислитель может быть использован также в системе слепой посадки, где обеспечивает точность порядка 0,32 *км*. *В. П. Парамонов*

1921. Электронное устройство для печатания адресов. Карролл (Electronic addressing aids publishers. Carroll John M.), Electronics, 1953, 26, № 2, 98—100 (англ.)

В статье в общих чертах описывается устройство для скоростного печатания адресов, разработанное фирмой «Истмэн Кодак» (Eastman Kodak) и используемое для обслуживания подписчиков на издания, распространяемые по почте.

Принцип работы устройства заключается в следующем. Каждая буква или цифра изображается в таблице с основанием в 5 квадратиков и высотой в 7 квадратиков по тому принципу, который используется при вышивании «крестом». Печатание осуществляется семью молоточками (по одному на каждый из 7 рядов квадратиков по высоте таблицы), каждый из которых делает от одного до пяти ударов на тех из пяти возможных позиций, которые соответствуют требуемой форме буквы или цифры. Таким образом, буква или цифра составляется из прямоугольных точек, напечатанных в определенном порядке указанными семью молоточками. Адреса подписчиков, состоящие из 4 строк по 24 буквы, пробиваются на перфокартах в соответствии с некоторым кодом. Перфокарта разделяется на 4 части (по высоте); каждая часть соответствует одной строке адреса с 24 знаками. Используется позиционный код (два отверстия на 6 возможных позициях). Считывание данных с перфокарт производится фотоэлектрическим путем.

Считывающая часть устройства состоит из нужного числа фотоэлементов и усилителей; она вырабатывает кодовые группы импульсов для каждой требуемой буквы или цифры. Эти группы импульсов подводятся к запоминающему магнитному устройству, куда подаются также синхронизирующие импульсы.

С запоминающего устройства сигналы подаются на 4 группы по 6 триггеров в каждой группе:

импульсы от этих схем поступают на декодирующее устройство в виде матрицы из германиевых диодов, которое для каждой кодовой группы избирает линию, соответствующую печатаемому знаку. Каждая такая линия заставляет определенным образом, срабатывать 7 печатающих молоточков при этом печатается нужная буква.

Устройство имеет 4 печатающих головки по 7 молоточков в каждой и вырабатывает до 42 000 четырехстрочных адресных табличек в 1 час.

Приводятся фотографии общего вида устройства и механизма печатания адресов.

В конце статьи упоминается о других средствах скоростного печатания, в частности имеющих иную систему запоминания, чем описанная в статье, и систему, у которой выдаваемый адрес получается на экране электроннолучевой трубки.

Дается библиография из 5 наименований.

В. С. Бородин

1922. Новая система управления для зенитных орудий (New eye and brain for AA guns), Electronics., 1953, **26**, № 4, 8, 10 (англ.)

Приводятся некоторые данные об автоматическом зенитном орудии большого калибра типа «Скайсвипер» с поставленными на нем радиолокационной установкой, вычислительным устройством и устройством управления (РЖМат, 1953, 992).

Установка обнаруживает вражеский самолет, летящий со звуковой скоростью, на расстоянии 240 *км*, вычислительное устройство определяет параметры его движения, устройство управления наводит орудие и ведет стрельбу со скоростью 45 выстрелов в 1 мин. Эффективная стрельба на поражение цели ведется на расстоянии 6,4 *км*.

Все устройство имеет 317 электронных ламп. Стоимость системы управления огнем составляет 75% стоимости всего орудия, которое оценивается в 240 тыс. долларов.

Система управления стрельбой этого типа была разработана фирмой «Сперри» (Sperry Gyroscope Co.) и испытана в 1948 г. Приведена фотография орудия. *В. Н. Аверин*

1923. Прибор для измерения расхода горючего (Accurate fuel flow instrument developed), Amer. Aviation, 1953, **16**, № 22, 24 (англ.)

Сообщается о приборе фирмы «Гавко» (GAVCO) для измерения расхода жидкого горючего. Прибор предназначен для измерения расхода горючего реактивных и поршневых двигателей самолетов. Состоит из следующих частей: определителя объемного расхода горючего, определителя удельного веса горючего и электронного интегратора. Прибор дает показания расхода горючего в фунтах на специальной шкале с точностью до 1% в любых летных условиях, независимо от давления, температуры, влажности, скорости полета, вязкости и удельного веса топлива. Вес прибора 3,6 *кг*. Прибор занимает объем около 5,7 $дм^3$. *Е. А. Волков*

1924. Электронные вычислительные машины помогают конструкторам управляемых снарядов («Electronic Brains» help missile designers), Air Pictor. and Air Res. Gaz., 1953, **15**, № 5, 158 (англ.)

Расчеты при проектировании современных самолетов и управляемых снарядов настолько сложны, что практически не выполнимы не только на настольных счетных машинах, но и на машинах непрерывного действия. Поэтому современных конструкторов могут удовлетворить только быстродействующие цифровые электронные вычислительные машины.

В заметке высказывается соображение о том, что было бы целесообразно приспособить электронную вычислительную машину не только для больших численных расчетов, но и использовать такие машины непосредственно при производстве самолетов. Например, электронная машина могла бы, вычисляя профиль крыла, не составлять соответствующую таблицу, а прямо сообщать данные станку, обрабатывающему этот профиль.

Е. А. Волков

1925. Вычислительное устройство для централизованного контроля производственного процесса. (Computer for centralized production control), Prod. Engng, 1953, **24**, № 3, 238 (англ.)

Сообщаются некоторые дополнительные сведения о вычислительном устройстве OSP для централизованного контроля производства (РЖМат, 1953, 995).

Вычислительному устройству OSP могут быть сообщены данные, которые представляются при помощи электрических импульсов с частотой до 20 *гц*. Обычно каждому переданному импульсу соответствует одна единица выпускаемой продукции. В OSP имеется преобразователь масштабов (множитель), при помощи которого можно задать желательную цену деления шкалы прибора в единицах выпускаемой продукции. OSP указывает на шкале отклонения производственного процесса от плана, а при достижении этим отклонением недопустимых (заранее установленных) пределов OSP подает звуковой сигнал.

Размеры прибора 190 *мм* × 195 *мм* × 205 *мм*; вес 4 *кг*; питание от цепи переменного тока: 110 *в*, 60 *гц*; потребляемая мощность 7 *вт*. *Е. А. Волков*

1926. Электронный аппарат, реагирующий на числа, названные по телефону (Electronic device reacts intelligently to numbers spoken into telephone), Electrical Engng, 1953, sec. 1, **72**, № 3, 274—275 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 996.

1927. Устройство, заменяющее диск телефона-автомата (Automatic recognizer may replace telephone dial), Prod. Engng, 1953, **24**, № 3, 262 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 996.

1928. Автоматизация управления (Automation. Challenge to management), Plant Admin., 1953, **13**, № 4, 65 (англ.)

Краткое популярное изложение принципов автоматического контроля и управления.

В общих словах описывается применение цифровых вычислительных машин и моделирующих устройств для целей автоматического управления физическими процессами. *Е. А. Волков*

1929. Машинное ведение операций по денежным переводам. Флек (Maschinelle Buchungsmethoden im Einzahlungsverkehr. Fleck E.), Z. Post-und Fernmeldewesen, 1953, **5**, № 9, 305—312 (нем.)

Обработка денежных переводов по почте и телеграфу требует проведения трояко рода операций: арифметических, а именно суммирования переводимых сумм и отдельно почтовых сборов, бухгалтерских и штемпелевания. Дано детальное описание машины, выполняющей операции первого и второго рода. *В. М. Брадис*

1930 П. Баллистический механизм. Холшу, Фрам (Ballistic mechanism. Holschuh Carl G., Fram David) [The Sperry Corp., США]. Пат. США 2638269, кл. 235—61,5,12.05.53

Прибор управления артиллерийским зенитным огнем имеет несколько маховичков с логарифмическими шкалами. Маховички поворачиваются вручную на углы, пропорциональные логарифмам заранее определенных функций скорости, высоты и угла возвышения цели. Углы, пропорциональные логарифмам указанных функций, складываются при помощи дифференциалов, и сумма этих углов поворотов передается антилогарифмическому устройству. В приборе имеются баллистические коноиды, которые перемещаются в одном направлении от антилогарифмического устройства и во втором направлении перемещаются в соответствии с азимутом орудия. На выходах коноидов получаются упрежденные данные. *Е. А. Волков*

См. также: 1611, 1836; РЖМех, 1953, 1235, 1236; РЖАстр, 1953, 1410

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

1931. К истории развития математики в Азербайджане. Гусейнов А. И., Изв. АН Азерб.ССР, 1953, № 7, 19—38 (русск.; резюме азерб.)

Математические исследования достигли в Азербайджане высокого уровня в X—XIII вв. (Табризи, Насирэддин Туси и др.). Затем в развитии наук в Азербайджане наступил многовековой застой, вызванный нашествиями иноземных завоевателей — монголов, персов, турок, надолго задержавших социальное и культурное развитие страны. Лишь советская власть дала азербайджанскому народу возможность встать на путь быстрого и всестороннего прогресса. До 1917 г. в Азербайджане имелось несколько начальных школ с обучением на азербайджанском языке, всего у трех азербайджанцев было законченное высшее физико-математическое образование.

В настоящее время в республике есть научно-исследовательский институт физики и математики АН Азерб. ССР и около 20 математических кафедр в вузах. Большую помощь математикам Азербайджана оказывают русские, особенно московские ученые и ученые Тбилиси. Советские азербайджанские математики получили ряд ценных результатов в следующих основных направлениях: 1) дифференциальные и интегральные уравнения с приложениями к механике и физике (А. И. Гусейнов, Я. Б. Лопатинский, З. И. Халилов и их ученики), 2) аналитические функции — теория приближения, проблема полноты; интерполяция (И. И. Ибрагимов и др.), 3) тензорная дифференциальная геометрия (М. А. Джавадов, Б. А. Розенфельд), 4) теория групп и колец (М. А. Гаджиев, Р. М. Султанов), 5) история математики (Г. Д. Мамедбейли, Б. А. Розенфельд, Р. М. Султанов). *А. П. Юшкевич*

1932. Построения и постулаты у Евклида. Фрайезе (Costruzioni e postulati in Euclide. Frajese Attilio), Archimede, 1953, **5**, № 2, 45—48 (итал.)

Краткое изложение точки зрения автора на постулаты и построения 1-й книги «Начал» Евклида. Утверждается, что первые четыре предложения этой книги являются продолжением и уточнением постулатов, в частности, четвертое предложение употребляется в дальнейшем как постулат. Критикуется теория Цейтена, согласно которой Евклид проводит доказательства существования посредством построения. Автор считает, что Евклид предполагает равносторонний треугольник заранее существующей фигурой, поэтому два круга, применяемые при построении его (предложение 1 книги I), должны иметь точку пересечения. Подробнее взгляды автора изложены в его других статьях (Arch. internat. histoire sci. 1951, **15**, 383—392; Archimede, 1951, № 3—4). *И. Г. Башмакова*

1933. Попытка восстановления одного доказательства Ферма. Облат (Egy Fermat-féle bizonyítás helyreállításának kísérlete. Oláth Richárd), Math. lapok, 1953, **4**, № 1, 18—30 (венг.); резюме русск., франц.)

Предлагается очень вероятная реконструкция не дошедшего до нас доказательства Ферма его так называемой малой теоремы. Автор считает, что Ферма проводил доказательство теоретико-групповым методом, который был впервые для этой теоремы применен Леонардом Эйлером (3-е доказательство Эйлера малой теоремы Ферма). *И. Г. Башмакова*

1934. Об огибающей парабол у Торичелли и о понятии огибающей семейства плоских кривых. Прочисси (Su n'inviluppo delle parabole in Torricelli e sulla nozione di inviluppo di una famiglia di curve piane. Procissi Angiolo), Period. mat. 1953, сер. 4, **31**, № 1, 34—43 (итал.)

Рассматриваются рассуждения Торичелли об огибающей семейства парабол, являющихся траекториями материальной точки, бросаемой с данной начальной скоростью под произвольным углом к горизонту. Понятие огибающей у Торичелли сопоставляется с понятием огибающей у Лейбница. *В. В. Рыжков*

1935. Труды французских математиков. Лорти (L'oeuvre des mathématiciens français. Lortie Léon), Technique, 1953, **28**, № 5, 307—311 (франц.)

Краткое описание работ Даламбера и Лагранжа. Упоминаются также Лопиталь, Паскаль, Декарт, Лежандр и другие французские математики. *В. И. Левин*

1936. Риччи Курбастро (1853—1925). Форти (Ricci Curbastro (1853—1925). Forti Umberto), Illustr. scient., 1953, **5**, № 40, 33—34 (итал.)

Краткий популярный очерк о значении тензорного исчисления и роли итальянского математика Риччи Курбастро в создании этого исчисления.

И. Г. Башмакова

1937. Умер Э. Цермело (Am 21.5. 1953 verstarb...), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 27/28, 14 (нем.)

21 мая 1953 г. на 82 году жизни скончался известный математик Эрнст Цермело, профессор Фрейбургского университета.

1938. Юлиус Ярош. Пилиццотти (Hofrat Julius Jarosch. Pilizotti K.), Internat. math. Nachr., 1953, **7**, № 25/26, 60—61 (нем.)

Некролог австрийского педагога — специалиста по начертательной геометрии —Ю. Ярош (1884—1952).

1939. Биографии выдающихся математиков. Вундерлих (Lebensbilder Bedeutender Mathematiker. Wunderlich W.), Internat. math. Nachr., **7**, № 25/26, 2—3 (нем.)

Сообщение о новом разделе «Биографии выдающихся математиков» в журнале «Internationalen mathematischen Nachrichten».

1940 РЕЦ. Книга о квадратных числах, переведенная впервые со средневековой латыни на французский. Леонард Пизанский (Le livre des nombres carrés. Traduit pour la première fois du latin médiéval en français. Avec une Introduction et des notes par P. Ver Eecke. Leonard de Pise, pp. XXVI + 76, 26 figs, Desclée De Brouwer et C-ie, Éditeurs, Bruges, 1952, 200 frs belges) [**Рецензии: Вер Экке** (Ver Eecke Paul), Scientia, 1953, **83**, № 493, 54; **Итар** (Itard Jean), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 2, 179—180 (франц.)]

1941 РЕЦ. Краткие биографии математиков (Kurze Mathematiker-Biographen Beihefte zur Zeitschrift «Elemente der Mathematik», pp. 24, Verlag Birkhäuser, Basel, 3 fr. 50 suisses) [**Рецензия: Итар** (Itard Jean), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 2, 180—181 (франц.)]

1942 РЕЦ. От Евклида до Эддингтона. Уиттекер (Von Euklid zu Eddington. Whittaker Edmund, S. 280, Wien-Stuttgart, Humboldt-Verlag, 1952, 10.80 DM) [**Рецензия: Штраусс, Торней** (Strauss Lothar von, Torney), Universitas, 1953, **8**, № 7, 752—753(нем.)]

1943 РЕЦ. Научные и технические работы Гийома-Генри Дюфура. Бешлин, Фавр, Кольро, Штюсси (L'oeuvre scientifique et technique du général Guillaume-Henri Dufour. Baeschlin F., Favre H., Kollros L., Stüssi F., pp. 447, 2 pl., figs, Edit. du Griffon, Neuchâtel, 1947) [**Рецензия: Россье** (Rossier P.), Rev. histoire sci., 1953, **6**, №2, 178 (франц.)]

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Авазашвили Д. З. 1672
Агмон 1618
Адлер 1732 **РЕЦ**
Азбелев Н. В. 1811
Алберт 1751
Алексеева О. П. 1652
Аллард 1910 **РЕЦ**
Аллен 1903
Алхимов М. 1706
Альбер С. И. 1686
Аманов Т. И. 1656
Анго 1701 **РЕЦ**
Андерсон 1530 **РЕЦ**
Андерсон 1762 **РЕЦ**
Аренс 1593
Аржаных И. С. 1650
Артемиадес 1622
Артин 1530 **РЕЦ**
Асмус 1703 **РЕЦ**
Ахунд-заде М. Ю. 1690

Б

Бабакова О. И. 1604
Бадден 1695
Базылев В. Т. 1799 **Д**
Бальхен 1872
Банкрофт 1762 **РЕЦ**
Барнард 1753
Бартлетт 1736
Баукер 1761 **РЕЦ**
Бейли 1764 **РЕЦ**
Бекенбах 1633 **РЕЦ**
Бергман 1631
Березина Л. Я. 1793
Беркли 1849
Берман Г. Н. 1705 **РЕЦ**, 1826 **К**
Берман Д. Л. 1609
Берман С. Д. 1574
Берри 1847
Бертолини 1684
Бешлин 1943 **РЕЦ**
Бибб 1831 **РЕЦ**
Бикли 1837 **РЕЦ**
Бирд 1554
Блит 1762 **РЕЦ**
Боревич З. И. 1567
Борель 1576
Брадфорд 1655
Бранс 1873
Брейденбах 1779 **РЕЦ**
Бронуэлл 1704 **РЕЦ**
Брукс 1763 **РЕЦ**
Брусс 1660
Брызгалов В. И. 1775
Буккель 1770
Булгаков И. С. 1912 **Д**
Булиган 1525 **РЕЦ**
Бурбаки 1526 **РЕЦ**, 1527 **РЕЦ**

В

Вальтер 1680
Вальфиш А. З. 1543
Ван Вейнгарден 1692
Вандивер 1546
Ван Хао 1533
Василенко П. М. 1685
Васильев В. В. 1681
Васильева Н. К. 1559
Вейнштейн 1666
Векилов Ш. И. 1665
Векуа И. Н. 1653, 1698
Веррист 1531 **РЕЦ**
Вер Экке 1940 **РЕЦ**
Весентини 1783, 1784
Виллерс 1732 **РЕЦ**, 1909 **РЕЦ**
Виноград Р. Э. 1644
Волков Д. М. 1657
Волохин А. В. 1634 **Д**
Вольф 1583
Вотау 1761 **РЕЦ**
Вулих Б. З. 1720
Вулф 1689
Вундерлих 1834 **РЕЦ**, 1939

Г

Гаддум 1757, 1758
Ганзбург И. М. 1607, 1615
Гарнир 1667
Гилварри 1669
Главка 1555 **РЕЦ**, 1590 **РЕЦ**
Годо 1785
Голд 1752
Голдстайн 1828 **РЕЦ**
Гофман 1738
Гохберг И. Ц. 1715
Грегг 1825
Грейвс 1730
Гринвуд 1735
Гродер 1911 **РЕЦ**
Гроноу 1739
Груневолд 1578
Грюнберг 1566
Гумбель 1735
Гупта 1777
Гусейнов А. И. 1931

Д

Давенпорт 1555 **РЕЦ**
Данжуа 1599
Даниэлс 1530 **РЕЦ**
Данкан 1760 **РЕЦ**
Данкан 1635
Даннинг 1530 **РЕЦ**
Дево 1840
Дейвис 1803
Дейвис 1532
Деккер 1534
Деланж 1620
Дёрр 1680
Детуш-Эплиман 1714
Джессел 1530 **РЕЦ**
Джефри 1603 **РЕЦ**
Джонс 1548
Джонсон 1917 **П**
Джонсон 1834 **РЕЦ**
Джоэл 1914 **П**, 1915 **П**
Дмитриев С. Н. 1765 **Д**
Дрегер 1556 **РЕЦ**
Дрейфус 1839
Дуайр 1828 **РЕЦ**, 1829 **РЕЦ**
Дубнов Я. С. 1774 **К**
Дубовицкий А. Я. 1601
Дьюранд 1735
Дюфрен 1551

Е

Егер 1781 **РЕЦ**
Егорова И. А. 1697
Ершов Б. А. 1643

Ж

Жемона 1721
Женхэн О. 1679
Жиро 1724

З

Залгаллер В. А. 1807
Заморзаев А. М. 1580 **Д**
Зейдель 1633 **РЕЦ**
Зелинский 1562 **РЕЦ**, 1586
Зубов В. И. 1645

И

Ибрагимов И. И. 1606
Йост 1670
Итар 1940 **РЕЦ**, 1941 **РЕЦ**

К

Казан 1910 **РЕЦ**
Казанова 1782
Каллахан 1919 **П**
Каллианпур 1729
Камат 1733, 1734
Капланский 1710
Карльссон 1535
Карратерс 1763 **РЕЦ**
Карролл 1921
Картон 1792
Кауфман 1816
Кёлер 1813
Келликутт 1906
Кемпторн 1746, 1750 **РЕЦ**
Кертис 1771
Килмистер 1584
Кильберг Е. М. 1707
Кинни 1728
Кирстед 1671
Киртадзе Г. А. 1597 **Д**
Кислер 1833 **РЕЦ**
Кислицын С. Г. 1773
Кифер 1748
Класс 1843
Клеммов 1693
Клерич 1888
Клин 1539 **РЕЦ**
Кок 1890
Кокс 1760 **РЕЦ**
Колен 1754

Коллац 1827 **РЕЦ**
Кольро 1944 **РЕЦ**
Кольрю 1832 **РЕЦ**
Кон 1670
Конти 1918 **П**
Коревар 1608
Корнер 1530 **РЕЦ**
Корт 1776
Косул 1585
Котелянский Д. М. 1561
Кошелев А. И. 1661
Коэн 1545
Крандалл 1812
Красносельский М. А. 1717
Крейг 1741
Крейг 1802
Крили 1819
Крулль 1581
Крыговский 1789
Купрадзе В. Д. 1674
Курота 1590 **РЕЦ**
Курочкин В. 1829 **РЕЦ**
Кучера 1523
Куленкамп 1908
Кюннет 1809

Л

Лазар 1563
Лактанова Н. В. 1795 **Д**
Ламан 1805
Лангенбергер 1701 **РЕЦ**
Ландт 1906
Лача 1742
Лащенов К. В. 1696
Легрен-Писсар 1791
Леземан 1909 **РЕЦ**
Леккеркеркер 1544
Леонард Пизанский 1940 **РЕЦ**
Леопольдт 1582
Лесли 1759
Ливингстон 1605
Линд Поттер 1640
Линдал 16 8
Линдли 1745
Ли винов 1814
Литвинов М. В. 1814
Ллойд 1737
Лоренцен 1568
Лорти 1935
Лохер-Эрнст 1768
Людвиг 1528 **РЕЦ**
Люсси 1528 **РЕЦ**, 1531 **РЕЦ**
Ляпунов А. А. 1598

М

Мак 1612 **РЕЦ**
Макарова З. Т. 1808
Макдоналд 1849
Мак-Иннис 1549
Маккей Д. В. 1709
Мак-Лафлин 1588
Мак-Миллан 1731
Мак-Шейн 1712
Маллер 1530 **РЕЦ**
Манареси 1641
Маркс 1602
Марун 1702 **РЕЦ**
Мейкар 1628
Мейкар 1628
Мергелян С. Н. 1629
Метрополис 1723
Мечлер 1910 **РЕЦ**
Милн 1827 **РЕЦ**
Милс 1571
Митиура 1579
Мойнихан 1874
Мойс 1594
Морошкин Ю. Ф. 1772
Москович 1907
Мостовский 1539 **РЕЦ**
Мотода 1573
Мурнаган 1577
Мурье 1726
Мюллер 1801

Н

Наир 1744
Нам Дян-чун 1649 **Д**
Насс 1673
Натансон И. П. 1610
Нейенх йс 1804
Нейсс 1556 **РЕЦ**
Нелсон 1751
Никольский С. М. 1611
Ниренберг 1662
Нисневич Л. Б. 1775
Новоселов В. С. 1623
Нолл 1910 **РЕЦ**
Ньюберг 1575

О

Облат 1933
Одзаки 1632
Ожигова Е. П. 1542
О'Каллахан 1876
Олум 1596
Оно 1632

П

Пайу 1817
Палама 1550
Палмер 1830 **РЕЦ**, 1831 **РЕЦ**
Папич 1591
Парасюк О. С. 1800
Пароди 1560
Паттен 1530 **РЕЦ**
Пивцайкин Г. И. 1521
Пизанский Леонард (см. Леонард Пизанский)
Пиларинос 1788
Пилицотти 1938
Пини 1668
Пиранян 1602
Платцер 1704 **РЕЦ**
Плотникова В. К. 1766 **К**
Позняк Э. Г. 1806
Поль 1780 **РЕЦ**
Прахар 1929 **РЕЦ**
Приг 1820, 1821
Притуло Ф. Ф. 1536
Проттер 1658
Прочисси 1934
Пуччи 1659
Пхам-Ман-Куан 1798

Р

Радо 1555 **РЕЦ**
Радон 1603 **РЕЦ**
Расулов М. Л. 1647
Рахманов Б. Н. 1625
Ребок 1780 **РЕЦ**
Редхеффер 1722
Рей Пастор 1525 **РЕЦ**
Риги 1756
Рид 1557 **РЕЦ**
Рид 1863
Римендьотти 1749
Риппер 1914 **П**
Роббинс 1729
Робертсон 1750 **РЕЦ**
Роднянский А. М. 1600
Рожанская Н. Н. 1718
Розенблат 1727
Россер 1540 **РЕЦ**
Росье 1943 **РЕЦ**
Рот 1716
Роте 1786
Роте 1700 **РЕЦ**
Русак Б. И. 1651
Рыбаков В. Н. 1794 **Д**
Рюссо 1526 **РЕЦ**, 1527 **РЕЦ**

С

Саган 1540 **РЕЦ**
Садовский Л. Е. 1705 **РЕЦ**, 1909 **РЕЦ**
Самбасива 1664
Самнер 1530 **РЕЦ**
Сен 1797
Серр 1576, 1595
Сеттерхом 1906
Сигал 1713
Сидлер 1778
Симпсон 1530 **РЕЦ**
Сингер 1755
Синьор 1693
Скорый И. А. 1517
Скотт 1870, 1871
Скотт 1572
Слейтер 1694
Слепенчук К. М. 1708
Слободкин 1671
Слободянский М. Г. 1711
Смирнов В. И. 1558 **К**, 1699 **К**
Смирнов М. М. 1676 **К**
Смит 1875
Смит 1691
Смит 1910 **РЕЦ**
Смит 1725
Сойер 1637
Соннеборн 1530 **РЕЦ**
Стаут 1830 **РЕЦ**
Степанов Г. Ю. 1626
Степанов Ю. 1767
Стивенс 1553
Столл 1562 **РЕЦ**
Стюарт 1557 **РЕЦ**
Суворов Г. Д. 1627
Схоутен 1796

Т

Такасу 1519
Там Цой-так 1638
Тандон 1746
Таунсенд 1802
Теркуэтт 1540 **РЕЦ**
Тернер 1904
Титчмарш 1663
Тиц 1630
Тодд 1787
Тольмин 1818
Тополянский Д. Б. 1654
Торней 1943 **РЕЦ**
Транзю 1683
Тресс 1769
Трон 1621

У

Уайкофф 1530 **РЕЦ**
Уилдер 1538 **РЕЦ**
Уиттекер 1942 **РЕЦ**
Улзава 1612 **РЕЦ**
Улам 1723
Умадзава 1688
Уэрмэр 1587

Ф

Фавр 1943 **РЕЦ**
Фильней М. И. 1824
Фиников С. П. 1790
Финкельштейн Б. В. 1747
Финни 1764 **РЕЦ**
Флек 1929
Фогель 1702 **РЕЦ**
Форте 1726
Форти 1936
Фрайезе 1932
Фрам 1930 **П**
Фрейм 1828 **РЕЦ**
Френкель 1877
Фриц 1920
Фрюауф 1524
Фьюосс 1530 **РЕЦ**

Х

Хадсон 1870, 1871
Хазе 1703 **РЕЦ**
Хаймович 1687
Халанай 1646
Халль 1761 **РЕЦ**
Ханна 1830 **РЕЦ**
Хантьес 1805
Харомонов С. А. 1677 **Д**
Харролд 1594
Хартман 1547
Хассе 1529 **РЕЦ**, 1590 **РЕЦ**
Хаяси 1642
Херман 1781 **РЕЦ**
Херцог 1616
Хикман 1910 **РЕЦ**
Хикс 1875
Хинсли 1870, 1871
Хинчин 1537

Ходжес 1727
Хокинс 1831 **РЕЦ**
Холшу 1930 **П**
Хоппер 1838
Хорн 1589
Хорснелл 1740
Хофрейтер 1562 **РЕЦ**

Ц

Цапырин В. Н. 1624
Цвид Ф. А. 1719

Ч

Чандрасекхар 1835
Чарин В. С. 1564
Чаунди 1636
Чезарео 1918 **П**
Ческино 1815
Чечик В. А. 1810
Чжоу 1617
Читти 1759
Читти 1759
Чжун 1675
Чугунов В. Д. 1678 **Д**
Чунихин С. А. 1569, 1570

Ш

Шайкин 1639
Шаллер 1700 **РЕЦ**
Шёнберг 1614
Шенкман 1565
Шинброт 1816
Шметтерер 1538 **РЕЦ**
Шпейзер 1909 **РЕЦ**
Шрейнер 1743
Штейнберг А. С. 1613 **Д**
Шторк 1833 **РЕЦ**
Штраусс 1942 **РЕЦ**
Штрёэр 1779 **РЕЦ**
Штыкан А. Б. 1823
Штюсси 1943 **РЕЦ**

Э

Эдрей 1619
Эйнис 1737
Эйуб 1541
Элберт 1835
Эллер 1680
Эллис 1592

Я

Яковлева Г. Ф. 1682 **Д**
Янг 1868
Янг 1752

A

Adler A. 1732 **РЕЦ**
Agmon Sh. 1618
Albert G. E. 1751
Allard L. S. 1910 **РЕЦ**
Allen L. M. 1903
Anderson C. D. 1530 **РЕЦ**
Anderson R. L. 1762 **РЕЦ**
Angot A. 1701 **РЕЦ**
Anis A. A. 1737
Arens R. 1593
Artémiadès N. 1622
Artin E. 1530 **РЕЦ**
Asmus E. 1703 **РЕЦ**
Ayoub R. 1541

B

Baeschlin F. 1943 **РЕЦ**
Bailey N. T. J. 1764 **РЕЦ**
Balchen J. G. 1872
Bancroft T. A. 1762 **РЕЦ**
Barnard G. A. 1753
Bartlett M. S. 1736
Beard R. H. 1554
Beckenbach E. F. 1633 **РЕЦ**
Bergman S. 1631
Berkeley E. C. 1849
Berry M. 1847
Bertolini F. 1684
Bibb S. F. 1831 **РЕЦ**
Bickley W. G. 1837 **РЕЦ**
Blyth C. R. 1762 **РЕЦ**
Borel A. 1576
Bouligand G. 1525 **РЕЦ**
Bourbaki N. 1526 **РЕЦ**, 1527 **РЕЦ**
Bowker A. H. 1761 **РЕЦ**
Bradford W. H. 1655
Breidenbach W. 1779 **РЕЦ**
Bronwell A. 1704 **РЕЦ**
Brooks C. E. P. 1763 **РЕЦ**
Brousse P. 1660
Bruns R. A. 1873
Buckel W. 1770
Budden K. G. 1695

C

Callahan E. L. 1919 **П**
Carroll J. M. 1921
Carruthers N. 1763 **РЕЦ**
Carton M. 1792
Casanova G. 1782
Cesareo O. 1918 **П**
Ceschino F. 1815
Chandrasekhar S. 1835
Chaundy T. W. 1636
Chitty D. 1759
Chitty H. 1759
Chong F. 1675
Chow H. C. 1617
Clemmow P. C. 1693
Clerici G. 1888
Cohen E. 1545
Colerus E. 1832 **РЕЦ**
Colin P. 1754
Collatz L. 1827 **РЕЦ**
Corner G. W. 1530 **РЕЦ**
County B. 1918 **П**
Court N. A. 1776
Cox D. R. 1760 **РЕЦ**
Craig C. C. 1741
Craig H. V. 1802
Crandall S. H. 1812
Creely J. W. 1819
Curtis H. J. 1771

D

Daniels F. 1530 **РЕЦ**
Davenport H. 1555 **РЕЦ**
Davies E. T. 1803
Davis M. 1532
Dekker J. C. E. 1534
Delange H. 1620
Denjoy A. 1599
Destouches-Aeschlimann F. 1714
Devaux P. 1840
Dörr J. 1680
Draeger 1556 **РЕЦ**
Dreyfus P. 1839
Dufresne P. 1551
Duncan A. J. 1760 **РЕЦ**
Duncan W. J. 1635
Dunning J. R. 1530 **РЕЦ**
Durand D. 1735
Dwyer P. S. 1828 **РЕЦ**, 1829 **РЕЦ**

E

Edrei A. 1619
Elbert D. 1835
Eller E. 1680
Ellis D. 1592

F

Favre H. 1943 **РЕЦ**
Finney D. J. 1764 **РЕЦ**
Fleck E. 1929
Fortet R. 1726
Forti U. 1936
Frajese A. 1932
Fram D. 1930 **П**
Frame J. S. 1828 **РЕЦ**
Fränkel M. 1877
Fritze E. H. 1920
Frühauf H. 1524
Fuoss R. M. 1530 **РЕЦ**

G

Gaddum J. H. 1757, 1758
Garnir H. G. 1667
Gessel A. 1530 **РЕЦ**
Geymonat L. 1721
Gilvarry J. J. 1669
Girault M. 1724
Godeaux L. 1785
Gold B. 1752
Goldstine H. H. 1828 **РЕЦ**
Graves R. E. 1730
Greenwood J. A. 1735
Gregg C. V. 1825
Groder M. L. 1911 **РЕЦ**
Groenewold H. J. 1578
Gronow D. G. C. 1739
Gruenberg K. W. 1566
Gumbel E. J. 1735
Gupta H. 1777

H

Haantjes J. 1805
Haase G. 1703 **РЕЦ**
Haimovici A. 1687
Halanay A. 1646
Hald A. 1761 **РЕЦ**
Hanna J. R. 1830 **РЕЦ**
Harrold O. G. Jr 1594
Hartman S. 1547
Hasse H. 1529 **РЕЦ**, 1590 **РЕЦ**
Hawkins G. E. 1831 **РЕЦ**
Hayashi Ch. 1642
Herrmann H. 1781 **РЕЦ**
Herzog E. R. 1616
Hickman R. E. B. 1910 **РЕЦ**
Hicks W. D. T. 1875
Hincin A. I. 1537
Hinsley F. B. 1870, 1871
Hlawka E. 1555 **РЕЦ**, 1590 **РЕЦ**
Hodges J. L., Jr 1727
Hofmann L. 1738
Hofreiter N. 1562 **РЕЦ**
Holschuh C. G. 1930 **П**
Hopper G. M. 1838
Horn A. 1589
Horsnell G. 1740
Hudson R. F. 1870, 1871

I

Itard J. 1940 **РЕЦ**, 1941 **РЕЦ**

J

Jeffery R. L. 1603 **РЕЦ**
Jeger M. 1781 **РЕЦ**
Joel A. E., Jr 1914 **П**, 1915 **П**
Johnson E. A. 1917 **П**
Johnson L. H. 1834 **РЕЦ**
Jones B. W. 1548
Jost R. 1670

K

Kallianpur G. 1729
Kamat A. R. 1733, 1734
Kaplansky I. 1710
Karlsson S. A. 1535
Kauffman W. M. 1816
Kauke J. 1890

Kazan B. 1910 **РЕЦ**
Kellicutt K. Q. 1906
Kempthorne O. 1746, 1750 **РЕЦ**
Kiefer J. 1748
Kierstead H. 1671
Kiessler F. 1833 **РЕЦ**
Kilmister C. W. 1584
Kinney J. R. 1728
Klass Ph. 1843
Kleene S. C. 1539 **РЕЦ**
Knoll M. 1910 **РЕЦ**
Koehler F. 1813
Kohn W. 1670
Kollros L. 1943 **РЕЦ**
Korevaar J. 1608
Koszul J.-L. 1585
Krull W. 1581
Krygowski Z. 1789
Kučěra J. 1523
Kuhlenkamp A. 1908
Künneth H. 1809

L

Laman G. 1805
Landt E. F. 1906
Langenberger A. 1701 **РЕЦ**
Latscha R. 1742
Lazard M. 1563
Legrain-Pissard 1791
Lekkerkerker C. G. 1544
Leonard de Pise 1940 **РЕЦ**
Leopoldt H. W. 1582
Lesemann K.-J. 1909 **РЕЦ**
Leslie P. H. 1759
Lind Potter P. R. 1640
Lindahl C. H. 1648
Lindley D. V. 1745
Livingston A. E. 1605
Lloyd E. H. 1737
Locher-Ernst L. 1768
Lorenzen P. 1568
Lortie L. 1935
Ludwig E. 1528 **РЕЦ**
Lüssy W. 1528 **РЕЦ**, 1531 **РЕЦ**

M

Maak W. 1612 **РЕЦ**
Macdonald N. 1849
McInnis S. W. 1549
McLaughlin J. E. 1588
McMillan B. 1731
McShane E. J. 1712
Makar B. H. 1628
Makar R. H. 1628
Manaresi G. 1641
Maruhn 1702 **РЕЦ**
Marx I. 1602
Mechler E. A. 1910 **РЕЦ**
Metropolis N. 1723
Michiura T. 1579
Mills W. H. 1571
Milne W. E. 1827 **РЕЦ**
Moise E. E. 1594
Moscovici M. 1907
Mostowski A. 1539 **РЕЦ**
Mourier È. 1726
Moynihan J. D. 1874
Muller H. J. 1530 **РЕЦ**
Müller H. R. 1801
Murnaghan F. D. 1577

N

Nair K. R. 1744
Nasse M. G. 1673
Neiss F. 1556 **РЕЦ**
Nelson L. 1751
Newburgh J. D. 1575
Nijenhuis A. 1804
Nirenberg L. 1662

O

Obláth R. 1933
O'Callaghan Th. 1876
Olum P. 1596
Onô I. 1632
Ozaki Sh. 1632

P

Pailloux H. 1817
Palamà G. 1550
Palmer C. I. 1830 **РЕЦ**, 1831 **РЕЦ**
Papić P. 1591
Parodi M. 1560
Patten B. M. 1530 **РЕЦ**
Pham-Man-Quan 1798
Pilizotti K. 1938
Pini B. 1668
Piranian G. 1602
Platzer H. L. 1704 **РЕЦ**
Pohl W. 1780 **РЕЦ**
Prachar K. 1529 **РЕЦ**
Pring R. W. 1820, 1821
Procissi A. 1934
Protter M. H. 1658
Pucci C. 1659
Pylarinos O. 1788

R

Rado R. 1555 **РЕЦ**
Radon J. 1603 **РЕЦ**
Read C. B. 1557 **РЕЦ**
Redheffer R. M. 1722
Rehbock F. 1780 **РЕЦ**
Reid C. 1863
Rey Pastor J. 1525 **РЕЦ**
Righi R. 1756
Rimendiotti U. 1749
Rippere R. O. 1914 **II**
Robbins H. 1729
Robertson M. J. 1750 **РЕЦ**
Rosenblatt M. 1727
Rosser J. B. 1540 **РЕЦ**
Rossier P. 1943 **РЕЦ**
Roth L. 1786
Rothe E. H. 1716
Rothe R. 1700 **РЕЦ**
Russo F. 1526 **РЕЦ**, 1527 **РЕЦ**

S

Sagan H. 1540 **РЕЦ**
Şaichin A. 1639
Sambasiva R. P. 1664
Sawyer W. W. 1637
Schaller W. 1700 **РЕЦ**
Schenkman E. 1565
Schmetterer L. 1538 **РЕЦ**
Schoenberg I. J. 1614
Schouten J. A. 1796
Schreiner W. 1743
Scott D. R. 1870, 1871
Scott W. R. 1572
Segal I. E. 1713
Seidel W. 1633 **РЕЦ**
Sen R. N. 1797
Senior T. B. A. 1693
Serre J.-P. 1576, 1595
Setterholm V. C. 1906
Shinbrot M. 1816
Simpson G. G. 1530 **РЕЦ**
Singer A. R. E. 1755
Slater L. J. 1694
Slobodkin L. B. 1671
Smith F. 1875
Smith R. C. T. 1691
Smith S. T. 1910 **РЕЦ**
Smith W. L. 1725
Sonneborn T. M. 1530 **РЕЦ**
Speiser A P. 1909 **РЕЦ**
Stevens H. F. 1553
Stewart B. M. 1557 **РЕЦ**
Stoll R. R. 1562 **РЕЦ**
Stork K. 1833 **РЕЦ**
Stout C. E. 1830 **РЕЦ**
Strauss L. von 1942 **РЕЦ**
Ströher W. 1779 **РЕЦ**
Stüssi F. 1943 **РЕЦ**
Sumner W. L. 1530 **РЕЦ**
Sydler J.-P. 1778

T

Taam Choy-tak 1638
Takasu T. 1519
Tandon O. B. 1746
Thron W. J. 1621
Tietz H. 1630
Titchmarsh E. C. 1663
Todd J. A. 1787
Tollmien W. 1818
Torney 1942 **РЕЦ**
Townsend B. B. 1802
Transue W. 1683
Tresse M. A. 1769
Turner R. P. 1904
Turquette A. R. 1540 **РЕЦ**

U

Ulam S. 1723

V

Vandiver H. S. 1546
Van Wijngaarden 1692
Verriest G. 1531 **РЕЦ**
Ver Eecke P. 1940 **РЕЦ**
Vesentini E. 1783, 1784
Vogel A. 1702 **РЕЦ**
Votaw D. F. Jr 1761 **РЕЦ**

W

Walther A. 1680
Wang Hao 1533
Weinstein A. 1666
Wermer J. 1587
Whittaker E. 1942 **РЕЦ**
Wilder R. L. 1538 **РЕЦ**
Willers 1732 **РЕЦ**, 1909 **РЕЦ**
Wolf P. 1583
Wolfe J. 1689
Wunderlich W. 1834 **РЕЦ**, 1939
Wyckoff R. W. G. 1530 **РЕЦ**

Y

Young F. H. 1868
Young G. O. 1752

Z

Zelinsky D. 1562 **РЕЦ**, 1586